1. Si el número de miembros de una población evoluciona según una ley logística,

$$\frac{dP}{dt}(t) = Q\Big(K - P(t)\Big)P(t),$$

y sabemos que en el instante $t = 0$ había 250 miembros en la población, que cuando $t = \text{Ln}(16)$ habrá 400 miembros y que $P_0(t) \equiv cte = 500$ es una posible solución de esta ecuación, calcula $P(t)$.

Respuesta. Si no recordamos la solución de la logística, podemos resolverla de nuevo. Es una ecuación de variables separadas (también lo es de Bernoulli). Primero notamos que, dado que $P_0(t) \equiv 500$ es una solución, se tiene:

$$0 = Q\Big(K - 500\Big)500 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K = 500},$$

aunque seguimos escribiendo K, por comodidad. Mediante fracciones simples obtenemos

$$\frac{1}{(K-P)P} = \frac{1/K}{P} + \frac{1/K}{(K-P)},$$

con lo que podemos integrar separando variables:

$$\frac{P'}{P(K-P)} = Q \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{K}\text{Ln}(P) - \frac{1}{K}\text{Ln}(K-P) = Qt + C \quad \Rightarrow \quad \text{Ln}\Big(\frac{P(t)}{K - P(t)}\Big) = KQt + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Antes incluso de despejar, podemos imponer $P(0) = 250$ para obtener

$$\text{Ln}\Big(\frac{250}{500 - 250}\Big) = 0 + C \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = 0},$$

y, por último, imponer que $P(\text{Ln}(16)) = 400$ para deducir

$$\text{Ln}\Big(\frac{400}{500 - 400}\Big) = 500Q\text{Ln}(16) = \text{Ln}(16^{500Q}) \quad \Rightarrow \quad 4 = 16^{500Q} = 4^{1000Q} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q = 1/1000}.$$

Ya que tenemos todas las constantes, sólo falta despejar $P(t)$:

$$\text{Ln}\Big(\frac{P(t)}{K - P(t)}\Big) = KQt \quad \Rightarrow \quad \frac{P(t)}{500 - P(t)} = e^{KQt} = e^{t/2} \quad \Rightarrow \quad P(t) = \frac{500e^{t/2}}{1 + e^{t/2}}.$$

2. Halla el intervalo de definición de la solución de la ecuación de Bernoulli, $x' + x = t\,x^3$, que verifica $x(0) = \sqrt{2}$.

Respuesta. Hemos de recordar el cambio para una ecuación de Bernoulli, en este caso $y = 1/x^2$. Derivando obtenemos la siguiente ecuación lineal completa.

$$y' = \frac{-2}{x^3}x' = \frac{-2}{x^3}(tx^3 - x) = -2t + \frac{2}{x^2} = 2y - 2t,$$

La solución general de la parte homogénea es $y_h(t) = C\,e^{2t}$ y, bien usando variación de las constantes o bien usando coeficientes indeterminados, fácilmente obtenemos una particular de la completa $y_p(t) = t + 1/2$. Por lo tanto las soluciones son todas de la forma

$$y(t) = \frac{1}{2} + t + C\,e^{2t}, \quad C \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad x(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + t + C\,e^{2t}}} \quad C \in \mathbb{R}.$$

La solución que cumple $x(0)=\sqrt{2}$ resulta de tomar $C=0$, por tanto $x(t)=\sqrt{\frac{2}{1+2t}}$, que está definida para $\boxed{t>-1/2}$.

3. Halla la solución general de la ecuación, $t\,x''-x'=3t^2$. ¿Dónde están definidas estas soluciones?

Respuesta. Como aparece x'' y x' pero no x (recordad qué pasa cuando reducimos órdenes), podemos tomar $z=x'$ y quedarnos en orden 1: $tz'-z=3t^2$. De nuevo unos simples cálculos (parte homogénea con coeficientes constantes y coeficientes indeterminados para la completa) nos permiten calcular

$$z(t)=z_p(t)+z_h(t)=3t^2+C\,t \quad C\in\mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t)=t^3+C\,t^2/2+C_1 \quad C,C_1\in\mathbb{R}},$$

que, por ser polinomios, están $\boxed{\text{definidas en } \mathbb{R}}$, aunque, $\boxed{\text{como soluciones}}$ de la ecuación lineal de orígen (cuyos coeficientes NO son continuos en $t=0$), $\boxed{\text{su intervalo maximal de definición será } (-\infty,0) \text{ ó } (0,\infty)}$.

4. Dada la ecuación, $z\,z''-(z')^2-4z^2\,\mathrm{Ln}(z)=-4z^2$,

4.a) Comprueba que el cambio de variables $z(t)=e^{y(t)}$ la transforma en una lineal con coeficientes constantes.

4.b) Encuentra la solución que cumple $z(0)=e^3$ y $z'(0)=0$.

Respuesta. Hacemos el cambio indicado

$$z=e^y \quad \Rightarrow \quad z'=y'e^y \quad \Rightarrow \quad z''=y''e^y+(y')^2e^y$$

y sustituimos en la ecuación:

$$\begin{aligned} 0=z\,z''-(z')^2-4z^2\,\mathrm{Ln}(z)+4z^2 &= e^y(y''e^y+(y')^2e^y)-(y'e^y)^2-4(e^y)^2\mathrm{Ln}(e^y)+4(e^y)^2 && (1)\\ &= e^{2y}\Big(y''+(y')^2-(y')^2-4y+4\Big). && (2)\end{aligned}$$

obteniendo $\boxed{y''-4y+4=0}$. Igual que en los dos ejercicios anteriores resolvemos fácilmente esta ecuación lineal con coeficientes constantes y obtenemos

$$y(t)=y_p(t)+y_h(t)=1+Ae^{2t}+Be^{-2t} \quad A,B\in\mathbb{R}.$$

De ahí calculamos $z(t)=e^{1+Ae^{2t}+Be^{-2t}}$, $A,B\in\mathbb{R}$. Imponiendo las dos condiciones iniciales, obtenemos:

$$\left\{\begin{array}{l} z(0)=e^{1+A+B}=e^3 \\ \\ z'(0)=e^{1+A+B}(2A-2B)=0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1+A+B=3 \\ A-B=0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \boxed{A=B=1}$$

5. Para el siguiente sistema,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

5.a) Estudia, en función del parámetro $b\in\mathbb{R}$, el comportamiento asintótico de sus soluciones.

5.b) Dibuja, para $b=-3/2$, el diagrama de fases.

Respuesta. Calculamos primero los valores propios de A,

$$0=p_A(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & b \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2+\lambda-(b+2) \;\Rightarrow\; \lambda=\frac{-1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+(b+2)}.$$

Como siempre estamos interesados en estudiar el signo de:

$$\mu:=\max_{\lambda\in\sigma(A)}\Re e(\lambda)=\frac{-1}{2}+\Re e\left(\sqrt{\frac{1}{4}+(b+2)}\right)$$

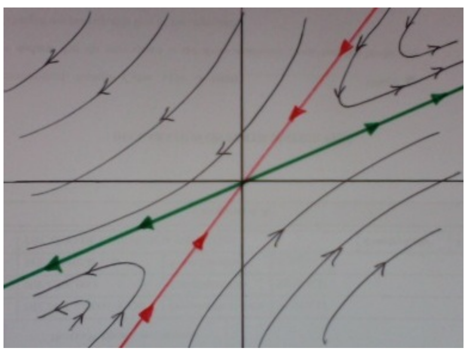
que sólo podrá ser positivo cuando $\sqrt{\frac{1}{4}+(b+2)}$ sea superior a $1/2$, lo que equivale a que $(b+2)$ sea superior a 0. Por lo tanto:

- Si $\boxed{b>-2}$ entonces $\mu>0$ y el sistema es $\boxed{\text{no acotado}}$.
- Si $\boxed{b<-2}$ entonces $\mu<0$ y el sistema es $\boxed{\text{convergente}}$.
- Si $\boxed{b=-2}$ entonces $\mu=0$. En este caso, dado que los dos valores propios $\lambda_{\pm}=-1/2\pm1/2$ son distintos , y por lo tanto, el que tiene parte real nula es simple, sabemos que el sistema es $\boxed{\text{acotado pero no convergente}}$.

El caso $b=-3/2$ ya sabemos que produce un sistema no acotado. Más concretamente, dado que los valores propios son

$$\lambda=\frac{-1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+(-\frac{2}{3}+2)}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$$

es decir, ambos reales, uno positivo y uno negativo, ya debemos tener una idea del diagrama de fases, del que sólo falta por concretar los subespacios propios (el **convergente**, correspondiente al valor propio negativo y el **divergente**, correspondiente al valor propio positivo).



6. Determina los valores de $c\in\mathbb{R}$ para los que la ecuación del oscilador armónico con rozamiento,

$$x''+2cx'+\omega^2x=0,$$

admita soluciones periódicas no triviales.

Respuesta. Dado que es una ecuación lineal homogénea de orden 2 con coeficientes constantes, para calcular sus soluciones basta conocer las raíces de su polinomio característico, en este caso (y lo hemos hecho varias veces en clase):

$$\lambda^2-2c\lambda+\omega^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda=c\pm\sqrt{c^2-\omega^2}.$$

Y las soluciones sabemos qué forma tienen según que estas raíces sean reales o complejas, simples o múltiples. Pero para la pregunta que nos hacen, basta observar una cosa: en cuanto los valores propios tenga parte real distinta de cero, seguro que en todas las soluciones aparece un factor de la forma $e^{\Re e\lambda t}$ que hará que la solución no sea periódica (de ningún periodo). Por lo tanto el único modo de que podamos obtener alguna solución periódica es que $\boxed{c=0}$, y efectivamente en este caso tenemos el oscilador armónico sin rozamiento cuyas soluciones sabemos que son combinaciones de $\cos(\omega t)$ y $\operatorname{sen}(\omega t)$.

7. Sea $C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-\omega^2&0\end{pmatrix}$ una matriz de monodromía de un sistema $x'=A(t)x$, con $A(t)$ continua y T–periódica. ¿Existen dos soluciones T–periódicas de dicho sistema linealmente independientes?

Respuesta. Los valores característicos (valores propios de C) son en este caso muy fáciles de obtener, son $\sigma(C) = \{1, i\omega, -i\omega\}$. Como el espacio vectorial de las soluciones periódicas tiene la misma dimensión que el subespacio propio de C asociado al valor propio 1, que en este caso es simple (dimensión 1), $\boxed{\text{no}}$ existirán dos soluciones periódicas linealmente independientes.

8. Estudia la existencia de soluciones π periódicas de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Respuesta. Primero hemos de ver si existen soluciones π periódicas de la parte homogénea. Dado que la matriz ya está en forma canónica y sus valores propios son $\sigma(A) = \{1, 2i, -2i\}$, podemos calcular rápidamente una matriz fundamental principal en $t = 0$ sin hacer ni un sólo cálculo:

$$\phi(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2t) & \operatorname{sen}(2t) \\ 0 & -\operatorname{sen}(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

Ya observamos que las dos últimas columnas (soluciones) son π periódicas; no obstante, para los que son muy metódicos, la matriz de monodromía y sus valores propios lo pueden confirmar:

$$C = \phi(\pi) = \begin{pmatrix} e^\pi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma(C) = \{e^\pi, 1, 1\},$$

por lo que, de nuevo, confirmamos que existe un subespacio de dimensión 2 de soluciones periódicas de la parte homogénea. Por lo tanto, hemos de aplicar la *alternativa de Fredholm* para ver si existen soluciones π periódicas de la completa.

En este caso, la ecuación es autoadjunta, es decir, su adjunta es ella misma ya que $-A^T = A$, por lo que la matriz fundamental de la adjunta coincide con la del sistema, que ya hemos calculado y, de hecho, conocemos sus dos soluciones periódicas (se entiende, una base), que son

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} \quad y \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \operatorname{sen}(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix},$$

por lo que basta ver si el término independiente $b(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es o no ortogonal a ambas. Veámoslo:

$$\int_0^\pi \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} \rangle dt = \int_0^\pi 0 dt = 0, \quad y \quad \int_0^\pi \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ -\operatorname{sen}(2t) \end{pmatrix} \rangle dt = \int_0^\pi 0 dt = 0,$$

por lo que $\boxed{\text{sí existen soluciones } \pi \text{ periódicas de la ecuación completa}}$, de hecho, un espacio afín de dimensión 2.