Universidad de Granada | Primer parcial | Ecuaciones Diferenciales
Departamento de Matemática Aplicada | | 3^{er}. curso
Facultad de Ciencias | 18–febrero–2010 | Ldo. Matemáticas

(Corrección de los 2 primeros ejercicios)

1) Responde razonadamente a cada una de las siguientes cuestiones.

1.A) Demuestra que lel cambio de variable $v = \ln(y)$ transforma la ecuación diferencial $y' + P(x)y = Q(x)(y\ln(y))$ en la ecuación diferencial lineal $v' + P(x) = Q(x)\,v$. Usa esta propiedad para resolver: $x\,y' - 4x^2y + 2\,y\ln(y) = 0$.

1.B) ¿Es posible que una matriz solución de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales pueda tener determinante nulo en unos puntos y no nulo en otros?

1.C) Demuestra que toda solución no trivial de la ecuación $x'' - \ln\left(\frac{1}{t^2+1}\right)x = 0$ está definida en $\mathbb{R}$ y tiene infinitos ceros.

1.D) ¿Existe una única (salvo factor constante) ecuación diferencial lineal homogénea de coeficientes constantes de orden cuatro que tiene por solución $t\cos t$?

1.E) Encuentra un factor integrante de la forma $\mu(x, y) = \mu(x)$ para la ecuación $y'(x^2y - x) + y = 0$ y resuélvela.

Respuesta:
1.A) El cambio es inmediato. La ecuación resultante tras el cambio es

$$v' + \frac{2}{x}v = 4x.$$

La parte homogénea tiene por solución $v_H(x) = k/x^2$ y haciendo variación de las constantes obtenemos la solución particular $v_p(x) = x^4\,1/x^2 = x^2$. Por lo tanto la solución beneral es $v(x) = x^2 + k/x^2$ con $k \in \mathbb{R}$ y, deshaciendo el cambio: $y(x) = exp\{x^2 + k/x^2\}$ con $k \in \mathbb{R}$.

1.B) La respuesta es no. Usando la fórmula de Jacoby–Liouville para una matriz solución deducimos que si una matriz solución tiene determinante nulo en un punto, entonces es nulo en todos los demás, y del mismo modo, si es distinto de cero en un punto (sería fundamental), entonces es distinto de cero en todos los demás puntos.

1.C) Como la ecuación es lineal y el coeficiente $q(t) = -\ln\left(\frac{1}{t^2+1}\right) = \ln(t^2+1)$ es continuo en todo $\mathbb{R}$, tenemos garantizada la existencia de solución. Por otro lado, si observamos que la función $q(t)$ es mayor o igual a cero y que sólo se anula en $t = 0$, podemos acotarla por debajo por una constante positiva en cualquier intervalo cerrado que no contenga al cero, por ejemplo

$$q(t) = \ln(t^2+1) \geq \ln(2) =: q_1 > 0, \qquad \forall\ t \in [1, \infty).$$

Usando el Teorema de comparación de Sturm, y sabiendo que la ecuación $x'' + q_1 x = 0$ tiene por solución a la función $\cos(\sqrt{q_1}\,t)$, deducimos que cualquier solución de $x'' + q(t)\,x = 0$ ha de tener un cero entre cada dos consecutivos de $\cos(\sqrt{q_1}\,t)$ en el intervalo $[1, \infty)$, y como ésta tiene infinitos ceros, pues la nuestra también.

1.D) La respuesta es sí. Del hecho que en la solución, $t\cos(t)$, aparezca el coseno de "$1 \times t$" deducimos que $\lambda = i$ (y por lo tanto $\lambda = (-i)$) son valores propios del polinomio característico asociado a la supuesta EDO de orden 4. Por lo tanto el polinomio ha de ser divisible por (λ^2+1). Pero como además aparece multiplicado por t, nos indica que estos valores propios han de ser, al menos, dobles. Por lo tanto el polinomio ha de ser divisible por $(\lambda^2+1)^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1$ ¡que ya es de grado 4! Deducimos pues que, salvo factor constante, la única EDO de orden 4 con coeficientes constantes que tenga a $t\cos t$ por solución es $x^{4)} + 2x'' + x = 0$.

1.E) Multiplicando por $\mu(x)$ e imponiendo exactitud, obtenemos

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{2-2xy}{x^2y-x} = \frac{(-2)(xy-1)}{x(xy-1)} = \frac{-2}{x}, \quad \Rightarrow \; \mu(x) = \frac{1}{x^2}.$$

La ecuación (exacta) resultante es: $y'\Big(y - \frac{1}{x}\Big) + y\;\frac{1}{x^2} = 0$ por lo que buscamos un potencial $F(x,y)$ verificando:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y - \frac{1}{x}, \qquad\qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x^2}$$

que resulta ser $F(x,y) = y^2/2 - y/x$. Las soluciones son, por lo tanto, de la forma (implícita):

$$\frac{y(x)^2}{2} + \frac{y(x)}{x} = K, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

2) Se considera la matriz de coeficientes constantes $A = \begin{pmatrix} b & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$, siendo $a, b \in \mathbb{R}$.

2.A) Estudia el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación $x' = A\,x$ en términos de los parámetros a y b.

2.B) Estudia, en función de $a \in \mathbb{R}$, la existencia de soluciones π–periódicas del sistema

$$x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \end{pmatrix}.$$

2.C) Esboza el diagrama de fases de $x' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x$.

Respuesta:

2.A) Un cálculo rápido nos lleva a que los valores propios de A son $\lambda = (b \pm \sqrt{b^2+4a})/2$. Por lo tanto, el valor propio con mayor parte Real es $\lambda = (b + \sqrt{b^2+4a})/2$ y

$$\mu := \max_{\lambda\in\sigma(A)} Re(\lambda) = \frac{b}{2} + Re(\sqrt{b^2+4a})/2.$$

Así pues, vamos descartando casos simples:

Si $\boxed{b>0}$, entonces $\mu \geq b/2 > 0$ sea quien sea a, y el sistema es NO ACOTADO.

Si $\boxed{b=0}$ entonces $\mu = Re(\sqrt{a})$, por lo que distinguimos según los valores de a:

- si $\boxed{a>0}$ entonces $\mu = Re(\sqrt{a}) > 0$ y el sistema es NO ACOTADO,
- si $\boxed{a=0}$ entonces $\mu = Re(\sqrt{a}) = 0$ y, como $\lambda = 0$ es doble, el sistema resulta NO ACOTADO.
- si $\boxed{a<0}$ entonces $\mu = Re(\sqrt{a}) = 0$ y, como $\lambda = \pm i\sqrt{-a}$ son simples, el sistema es ACOTADO.

Si $\boxed{b<0}$ entonces distinguimos según los valores de a:

- si $\boxed{a>0}$ entonces $\sqrt{b^2+4a} > |b| \Rightarrow \mu > 0$ y el sistema es NO ACOTADO,
- si $\boxed{a=0}$ entonces $\mu = 0$ y $\lambda = 0$, $\lambda = b$ son simples, el sistema es ACOTADO,
- si $\boxed{a<0}$ entonces, sea cual sea el signo del discriminante, (b^2+4a), obtenemos que

$Re(\sqrt{b^2+4a}) < |b|$ y por lo tanto $\mu < 0$ y el sistema es CONVERGENTE.

Colocado en una tabla

b vs. a	$a<0$	$a=0$	$a>0$
$b<0$	CONVERGENTE	ACOTADO	NO ACOTADO
$b=0$	ACOTADO	NO ACOTADO	NO ACOTADO
$b>0$	NO ACOTADO	NO ACOTADO	NO ACOTADO

2.B) El sistema es equivalente a la EDO de orden 2 siguiente: $x'' + a\,x = \cos(2t)$, por lo que estudiamos el polinomio asociado $p(\lambda) = \lambda^2 + a$, cuyas raíces son $\lambda = \pm\sqrt{-a}$, lo que nos lleva a distinguir inmediatamente según el signo de a.

Si $\boxed{a<0}$, entonces un sistema fundamental de soluciones es $\{e^{t\sqrt{-a}}, e^{-t\sqrt{-a}}\}$. Por lo tanto la parte homogénea NO admite soluciones π-periódicas y, usando la Alternativa de Fredholm, la ecuación completa admite una única solución π-periódica.

Si $\boxed{a=0}$, (pasamos a trabajar en formato matricial) la matriz fundamental principal en $t=0$ es

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde deducimos que existen algunas soluciones π-periódicas, las de la forma $(x(t), y(t)) = (A, 0)$ con $A \in \mathbb{R}$. Por ello necesitamos irnos al sistema adjunto, cuya matriz fundamental es

$$\psi(t) = (\phi^*(t))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{pmatrix}$$

y cuyas soluciones π-periódicas son $(x(t), y(t)) = (0, B)$ con $B \in \mathbb{R}$. Así pues, usando la Alternativa de Fredholm, la condición para la existencia de soluciones π-periódicas de la completa es que:

$$0 \stackrel{?}{=} \int_0^\pi \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \end{pmatrix} \right\rangle dt = B \int_0^\pi \cos(2t) dt \qquad \forall B \in \mathbb{R}$$

lo que sí se cumple en este caso, por lo que sí existen soluciones π-periódicas de la completa.

Si $\boxed{a>0}$ la matriz fundamental principal en $t=0$ es

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{a}\,t) & \frac{1}{\sqrt{a}} \operatorname{sen}(\sqrt{a}\,t) \\ -\sqrt{a} \operatorname{sen}(\sqrt{a}\,t) & \cos(\sqrt{a}\,t) \end{pmatrix}$$

y desde aquí, o pasando por la matriz de monodromía y sus valores propios (hecho varias veces en la relación de ejercicios), ya sabemos que la condición para que haya soluciones T-periódicas (en este caso lo son o dejan de serlo todas a la vez) es que $T\sqrt{a} \in 2\pi\mathbb{Z}$, en este caso, que $a = (2k)^2$ con $k \in \mathbb{N}$ (quitamos $k=0$, que corresponde con $a=0$ y ya está hecho, y el signo de k puesto que está al cuadrado).

Por lo tanto tenemos dos subcasos: $\boxed{a \notin \{(2k)^2, k \in \mathbb{N}\}}$ y $\boxed{a \in \{(2k)^2, k \in \mathbb{N}\}}$. En el primer subcaso la respuesta es inmediata, al no haber soluciones π-periódicas de la homogénea, existe una única solución π-periódica de la completa. En el segundo caso hemos de trabajar un poco mas.

Si $\boxed{a>0,\ a \in \{(2k)^2, k \in \mathbb{N}\}}$ estudiamos el sistema adjunto, cuya matriz fundamental es

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \cos(2k\,t) & 2k \operatorname{sen}(2k\,t) \\ \frac{-1}{2k} \operatorname{sen}(2k\,t) & \cos(2k\,t) \end{pmatrix}$$

y por lo tanto todas sus soluciones son π-periódicas. Usando de nuevo la Alternativa de Fredholm, la condición para la existencia de soluciones π-periódicas de la completa es que:

$$0 \stackrel{?}{=} \int_0^\pi \left\langle \begin{pmatrix} \cos(2k\,t) & 2k \operatorname{sen}(2k\,t) \\ \frac{-1}{2k} \operatorname{sen}(2k\,t) & \cos(2k\,t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \qquad \forall A, B \in \mathbb{R}$$

lo que se traduce en las condiciones:

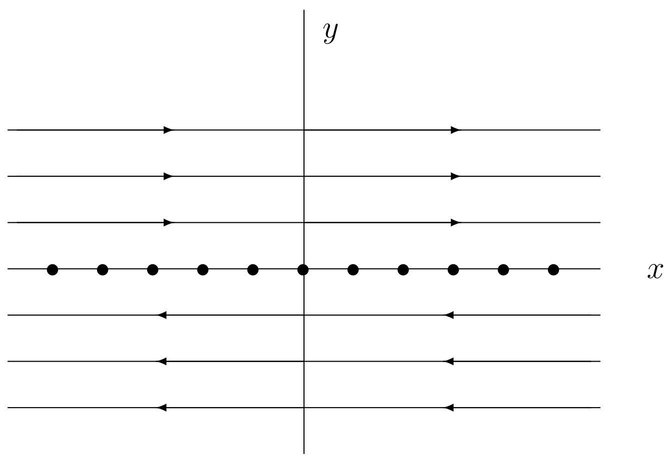
$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(2kt)\cos(2t)dt \stackrel{?}{=} 0, \qquad \int_0^{\pi} \cos(2kt)\cos(2t)dt \stackrel{?}{=} 0.$$

Aquí ya concluimos, porque la primera integral es siempre nula, pero la segunda no es nula para $k = 1$, ya que aparece la integral de un cuadrado. Por lo tanto, para valores de $k > 1$ sí existen soluciones π-periódicas de la completa pero para $k = 1 (\Leftrightarrow a = 4)$ no.

2.C) Las soluciones ya han sido calculadas en los apartados anteriores y son líneas rectas horizontales de la forma $(x(t), y(t)) = (At + B, A)$ con $A, B \in \mathbb{R}$.

Encontramos soluciones constantes (correspondientes a valores iniciales en el $Ker(A) = \{(x, y) : y = 0\}$) son de la forma $(x(t), y(t)) = (B, 0)$ y constituyen una recta completa de puntos fijos a lo largo del eje $Y = 0$.

El resto de soluciones para $A \neq 0$ forman rectas $\{(x, y) : y = A\}$ en el diagrama de fases que van hacia ∞ si $A > 0$ y hacia $-\infty$ si $A > 0$.



3 Sea $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ y $\mu = \text{máx}\{\text{Re}(\lambda),\ \lambda \in \sigma(A)\}$ verificando $\mu < 0$ y sea $B \in C(\mathbb{R}, \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$ tal que

$$\int_0^{\infty} \|B(t)\|\, dt < \infty\,.$$

3.A) Demuestra que para cada $\nu > \mu$ existe una constante $c_\nu > 0$ tal que $\|e^{A\,t}\| \leq c_\nu\, e^{\nu\, t}$.

3.B) Demuestra que el sistema $y' = (A + B(t))y$ es convergente.

3.C) Si λ es un valor propio de A y v es un vector propio asociado, comprueba que existe $y(t)$ solución de $y' = (A + B(t))\, y$ tal que $\lim\limits_{t \to \infty} e^{-\lambda t} y(t) = v$.