Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
Escuela Univ. Arquitectura Técnica

Segundo parcial
(Teoría)
8–junio–2009

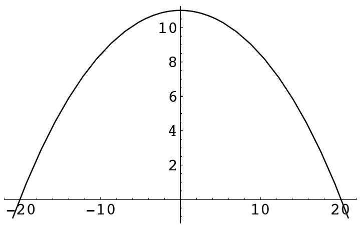
CÁLCULO MATEMÁTICO
Grupo G
ARQUITECTURA TÉCNICA

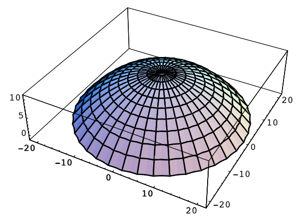
---

1. (Tema de teoría: Ecuaciones diferenciales.)

---

2. Se diseña una carpa para cubrir un coliseo de 40 m de diámetro. Dicha carpa tiene como sección transversal la curva $y = 31 - 20\cosh\left(\dfrac{x}{20}\right)$. Calcule el volumen en m^3 que encierra dicha carpa.





Respuesta: Dado que es un volumen de revolución en torno al eje Y, aplicamos la *fórmula de tubos*:

$$Vol = \int_a^b 2\pi\, x\, f(x)\, dx.$$

En nuestro caso, la función a girar es $f(x) = 31 - 20\cosh\left(\dfrac{x}{20}\right)$ en el intervalo $[0, 20]$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} Vol &= \int_0^{20} 2\pi\, x\left(31 - 20\cosh\Big(\frac{x}{20}\Big)\right) dx = \pi\left[31x^2 + 16000\cosh\Big(\frac{x}{20}\Big) - 800\,x\,\mathrm{senh}\Big(\frac{x}{20}\Big)\right]_0^{20} \\ &= \pi\Big(12400 - 16000\cosh(1) + 16000\,\mathrm{senh}(1)\Big) - \pi\Big(16000\cosh(0)\Big) = -3600\pi + 16000\frac{\pi}{e}. \end{aligned}$$

Nota: para buscar la primitiva descrita se ha de usar integración por partes.

---

3. Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = \dfrac{1}{x(x+4)}$

a) Calcule las funciones primitivas de f.

b) Estudie si f es impropiamente integrable en $(0, \infty)$.

Respuesta: Para buscar las primitivas primero descomponemos f en fracciones simples:

$$\frac{1}{x(x+4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} = \frac{(A+B)x + 4A}{x(x+4)} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4},\ y\ B = \frac{-1}{4}.$$

y segundo integramos directamente

$$\int \frac{1}{x(x+4)}dx = \int \frac{1/4}{x}dx - \int \frac{1/4}{x+4}dx = \frac{1}{4}\ln(x) - \frac{1}{4}\ln(x+4) + C = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x}{x+4}\right) + C.$$

Para ver si es impropiamente integrable en $(0, \infty)$ primero integramos en $[a, b]$ y luego hacemos los límites $a \to 0^+$ y $b \to \infty$:

$$\int \frac{1}{x(x+4)}dx = \left[\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x}{x+4}\right)\right]_a^b = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{b}{b+4}\right) - \frac{1}{4}\ln\left(\frac{a}{a+4}\right) \xrightarrow{b\to\infty\ a\to 0^+} +\infty$$

por lo que NO es integrable. Nota: obsérvese que el $\lim\limits_{b\to\infty}$ sí existe, el que falla es $\lim\limits_{a\to 0+}$.

---

4. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$:

a) Calcule el plano tangente a la función f en el punto $P = (1,1,1)$.

b) ¿Tiene la función f extremos absolutos en $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\}$? Justifique la respuesta y en caso afirmativo calcúlelos.

Respuesta: Para calcular el plano tangente sólo necesitamos las derivadas parciales de la función en el punto $(1,1)$ y aplicar la fórmula:

$$\textit{plano tg;} \qquad z - f(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b).$$

Calculamos las parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xe^{x^2-y^2}, \qquad \text{en el punto } (1,1): \ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2ye^{x^2-y^2}, \qquad \text{en el punto } (1,1): \ \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -2,$$

por lo tanto el plano tangente es:

$$z - 1 = 2(x-1) - 2(y-1) \quad \Rightarrow \quad z - 2x + 2y = 1.$$

Como la función es continua (por ser composición de la exponencial y un polinomio, ambas continuas) y el conjunto D es compacto (cerrado y acotado), el teorema de Weierstrass nos garantiza la existencia de máximo y mínimo absolutos de la función en D.

Como la función es derivable, sabemos que los extremos absolutos han de ser bien puntos críticos (en el interior de D), bien puntos críticos restringidos (en el borde de D), por lo que pasamos a calcularlos: Los *puntos críticos*: resuelven el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2-y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = -2ye^{x^2-y^2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{x=0} \text{ e } \boxed{y=0}, \text{ único punto crítico: } (0,0).$$

Para calcular los puntos críticos restringidos en este caso es muy fácil usar sustitución, ya que si despejamos, por ejemplo, y^2 en la restricción $x^2+y^2=1$ queda $y^2 = 1-x^2$ y al sustituirlo en la función obtenemos $f = e^{2x^2-1}$ con $x \in [-1,1]$ que es muchísimo más simple, al ser de una sóla variable. Pero como casi todos los alumnos han optado por usar multiplicadores de Lagrange, lo haremos por ese método. Primero definimos: $L(x,y,\lambda) = e^{x^2-y^2} + \lambda(x^2+y^2-1)$ y ahora resolvemos

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2xe^{x^2-y^2} + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -2ye^{x^2-y^2} + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2+y^2-1 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x(\lambda + e^{x^2-y^2}) = 0 \\ y(\lambda - e^{x^2-y^2}) = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \boxed{x=0} \text{ ó } \boxed{\lambda = -e^{x^2-y^2}} \\ \boxed{y=0} \text{ ó } \boxed{\lambda = e^{x^2-y^2}} \\ x^2+y^2 = 1 \end{array}\right\}$$

Visto lo cual, vamos haciendo primero los casos más simples y discutiendo paso a paso:

-caso $\boxed{x=0} \Rightarrow$ (sustituyendo en la 3^a) $\Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow \boxed{y=1}$ ó $\boxed{y=-1}$

-subcaso $\boxed{y=1} \Rightarrow$ (sustituyendo en la 2^a) $\Rightarrow \boxed{\lambda = e^{-1}}$

-subcaso $\boxed{y=-1} \Rightarrow$ (sustituyendo en la 2^a) $\Rightarrow \boxed{\lambda = e^{-1}}$

-caso $\boxed{y=0} \Rightarrow$ (sustituyendo en la 3^a) $\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x=1}$ ó $\boxed{x=-1}$

-subcaso $\boxed{x=1} \Rightarrow$ (sustituyendo en la 2^a) $\Rightarrow \boxed{\lambda = e}$

-subcaso $\boxed{x=-1} \Rightarrow$ (sustituyendo en la 2^a) $\Rightarrow \boxed{\lambda = e}$

-caso $\boxed{y \neq 0}$ y $\boxed{x \neq 0} \Rightarrow$ (usando la 1^a y 2^a) $\Rightarrow e^{x^2-y^2} = \lambda = -e^{x^2-y^2} \Rightarrow 2e^{x^2-y^2} = 0$!!! lo que es imposible y por lo tanto este caso no puede darse nunca.

Así los puntos críticos restringidos de f, serán: $\{(0,1), (0,-1), (1,0), (-1,0)\}$

Por último, para localizar el máximo y el mínimo, simplemente evaluamos f en los 5 puntos obtenidos:

punto (x,y)	$(0,0)$	$(1,0)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(0,-1)$
valor de $f(x,y)$	1	e	e	1/e	1/e

por lo que el mínimo absoluto sobre D es $1/e$ y lo alcanza en los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$ y el máximo absoluto sobre D vale e y lo alcanza en 2 puntos $(1,0)$ y $(-1,0)$.

---

5. Sea $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leq 2 \quad \text{e} \quad y \geq 0\}$ una plancha metálica semicircular cuya densidad viene dada por la función

$$\rho(x,y) = 2 + \frac{x^2+y^2}{10} \quad \text{si } (x,y) \in D.$$

Hace falta sostener la plancha de un único punto y de forma que permanezca horizontal, ¿qué punto tendríamos que emplear para ello? Calcule dicho punto

Respuesta: El punto que equilibra el peso de la placa para mantenerla horizontal es su *centro de masas*. Para calcularlo necesitamos calcular:

$$M = \int_D \rho(x,y) d(x,y), \qquad X_M = \frac{1}{M}\int_D x\,\rho(x,y)d(x,y) \quad e \quad Y_M = \frac{1}{M}\int_D y\,\rho(x,y)d(x,y).$$

Para hacer estas 3 integrales, dado que D es la parte superior (ya que $y \geq 0$) de una circunferencia de centro $(0,0)$ radio $\sqrt{2}$, haremos un cambio a coordenadas polares.

Pasamos a hacer los cálculos; primero la masa:

$$\begin{aligned}
M &= \int_D 2 + \frac{x^2+y^2}{10} d(x,y) = \begin{bmatrix} x = r\cos(\theta) & \\ y = r\,\text{sen}(\theta) & Jac = r \\ r \in (0,\sqrt{2}] & \\ \theta \in [0,\pi) & \end{bmatrix} = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\pi} \Big(2 + r^2/10\Big) r \ d\theta \right) dr \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \pi \Big(2 + r^2/10\Big) r \ dr = \pi \Big[r^2 + r^4/40 \Big]_0^{\sqrt{2}} = 2\pi + \frac{1}{10}\pi = \frac{21}{10}\pi.
\end{aligned}$$

En segundo lugar la componente X del centro de masas (hacemos el mismo cambio a polares):

$$\begin{aligned}
X_M &= \frac{1}{M}\int_D x\Big(2 + \frac{x^2+y^2}{10}\Big) d(x,y) = \frac{1}{M}\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\pi} \Big(2 + r^2/10\Big) r^2 \cos(\theta) \ d\theta \right) dr \\
&= \frac{1}{M}\int_0^{\sqrt{2}} \Big(2 + r^2/10\Big) r^2 \overbrace{\Big[\text{sen}(\theta)\Big]_0^{\pi}}^{=0} \ dr = 0.
\end{aligned}$$

Y por último la componente Y del centro de masas:

$$\begin{aligned}
Y_M &= \frac{1}{M}\int_D y\Big(2 + \frac{x^2+y^2}{10}\Big) d(x,y) = \frac{1}{M}\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\pi} \Big(2 + r^2/10\Big) r^2 \,\text{sen}(\theta) \ d\theta \right) dr \\
&= \frac{1}{M}\int_0^{\sqrt{2}} \Big(2 + \frac{r^2}{10}\Big) r^2 \Big[-\cos(\theta)\Big]_0^{\pi} dr = \frac{1}{M}\int_0^{\sqrt{2}} 4r^2 + \frac{r^4}{5} dr = \frac{1}{M}\Big[\frac{4r^3}{3} + \frac{r^5}{25}\Big]_0^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{10}{21\pi}\Big(\frac{8\sqrt{2}}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{25}\Big) = \frac{10(200+12)\sqrt{2}}{21\pi\,75} = \frac{424\sqrt{2}}{315\pi} \approx 0.61.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el centro de masas es el punto $(0, \frac{424\sqrt{2}}{315\pi})$.