Asignatura: Cálculo Matemático – Curso: 2008-2009
Relación de ejercicios del tema V: Introducción a las integrales múltiples

V.1. Calcula las siguientes integrales iteradas:

$$\textbf{a)} \int_0^1 \int_0^2 (x+y)\ dy\ dx \quad \textbf{b)} \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2}\ dy\ dx$$

$$\textbf{c)} \int_1^2 \int_0^4 \left(x^2 - 2\,y^2 + 1\right)\ dx\ dy \quad \textbf{d)} \int_0^1 \int_y^{2\,y} \left(1 + 2\,x^2 + 2\,y^2\right)\ dx\ dy$$

$$\textbf{e)} \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r\ dr\ d\theta \quad \textbf{f)} \int_0^{\pi/2} \int_0^{sen\,\theta} \theta\, r\ dr\ d\theta$$

V.2. Dibuja la región R cuya área viene dada por la integral iterada siguiente:

$$\textbf{a)} \int_0^1 \int_0^2 dy\ dx \qquad \textbf{b)} \int_1^2 \int_2^4 dx\ dy \qquad \textbf{c)} \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx\ dy$$

$$\textbf{d)} \int_0^2 \int_0^x dy\ dx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dy\ dx \qquad \textbf{e)} \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 dy\ dx \qquad \textbf{f)} \int_{-2}^2 \int_0^{4-y^2} dx\ dy$$

Cambia el orden de integración y comprueba que el resultado es el mismo.

V.3. Mediante una integral iterada, calcula el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas.

$$\textbf{a)}\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2,\ x = 0,\ y = 0 \qquad \textbf{b)}\ y = x^{3/2},\ y = x$$

$$\textbf{c)}\ 2\,x - 3\,y = 0,\ x + y = 5,\ y = 0 \qquad \textbf{d)}\ x\,y = 9,\ y = x,\ y = 0,\ x = 9$$

$$\textbf{e)}\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \textbf{f)} y = x,\ y = 2\,x,\ x = 2$$

V.4. Calcula el volumen del sólido limitado por las gráficas de las ecuaciones:

$$\textbf{a)} z = xy,\ z = 0,\ y = x,\ x = 1\ \textbf{b)} y = 0,\ z = 0,\ y = x,\ z = x,\ x = 0,\ x = 5$$

$$\textbf{c)} z = 0,\ z = x^2,\ x = 0,\ x = 2,\ y = 0,\ y = 4\ \textbf{d)} x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

V.5. Calcula el volumen del sólido limitado por el cilindro parabólico $z = 4 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$, $y = 6$.

V.6. Halla el volumen del sólido limitado por la superficie $z = e^{-(x^2+y^2)}$ y el plano $z = 0$, en los dominios
$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 \leq 4\}$ y
$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\ :\ x^2 + y^2 \leq 16,\ x^2 + y^2 \geq 4,\ y \geq \frac{\sqrt{3}}{3}x,\ y \leq \sqrt{3}x\}$.

V.7. Calcula el volumen de los sólidos siguientes:

a) Intersección de los dos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$, $y^2 + z^2 = r^2$.

b) El limitado por el plano $z = 0$, el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax \quad (a > 0)$ y el cono $x^2 + y^2 = z^2$.

c) El limitado por el cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ y los planos $y = 2x$, $x = 3$, en el primer octante.

d) Interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$ y al cilindro $x^2 + (y - R)^2 = R^2$.

V.8. Halla el volumen del sólido limitado por la superficie $x^2+y^2+z^2=R^2$, el cilindro $x^2+y^2-Ry=0$ e inferiormente por el plano $z=0$ (Cúpula de Viviani).

V.9. Calcula

$$\int_D y\; d(x,y)$$

donde

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;:\;x\geq 0,\;y\geq 0,\;x^2+y^2\leq 1,\;x^2+y^2-2x\geq 0\}.$$

V.10. Calcula

$$\int_D \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+4}\; d(x,y)$$

donde

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;:1\leq x^2+y^2\leq 25\}.$$

V.11. Se considera el disco $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;:\;(x-1)^2+y^2\leq 1\}$ y la función $f:D\to\mathbb{R}$ $f(x,y)=4-x^2-y^2$. Calcula el volumen de la región del espacio que se levanta sobre el conjunto D y está limitada superiormente por la gráfica de la función f e inferiormente por el plano $z=0$.

V.12. Calcula el volumen en el primer octante ($x\geq 0$, $y\geq 0$, $z\geq 0$) del sólido limitado por los planos $z=0$, $z=x+y+2$ y el cilindro $x^2+y^2=16$.

V.13. Halla el volumen de la región del primer octante limitada por el plano $x+y+z=1$.

V.14. Determina el volumen del sólido contenido en el primer octante que se encuentra limitado por el paraboloide y el cilindro de ecuaciones respectivas $z=x^2+y^2+1$, $x^2+y^2=4$.

V.15. Calcula $\displaystyle\int_\Omega x\; d(x,y)$ donde $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;:\;x\geq 1,\;x^2+y^2-2x\leq 0\}$.

V.16. Halla $\displaystyle\int_\Omega y\; d(x,y)$ donde $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;:\;9\leq x^2+y^2\leq 25,\;y\geq x,\;y\leq\sqrt{3}\,x\}$.

V.17. Calcula el volumen del sólido interior al cilindro $x^2+y^2=4$, limitado superiormente por la esfera $x^2+y^2+z^2=16$ e inferiormente por el plano $z=0$.

V.18. Halla el volumen del sólido limitado superiormente por el cono $4\,x^2+4\,y^2-z^2=0$, inferiormente por el plano $z=0$ y lateralmente por el cilindro $x^2+(y-2)^2=4$.

V.19. Calcula el volumen limitado por el paraboloide $x^2+y^2=z$, el cilindro $x^2+y^2-4x=0$ y el plano $z=0$.

V.20. Calcula el centroide de cada una de las siguientes regiones de $\mathbb{R}^2$:

a) Disco de centro $(1,1)$ y radio 2.

b) Triángulo de extremos $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.

c) Corona de radios r y R: $\Omega=\Big\{(x,y)\;:\;r^2\leq x^2+y^2\leq R^2\Big\}$

d) Cuadrilátero de extremos $(0,0)$, $(2,0)$, $(3,1)$ y $(1,2)$.

e) Primer cuarto de un disco: $\Omega=\Big\{(x,y)\;:\;x^2+y^2\leq 1,\;x\geq 0,\;y\geq 0\Big\}$.

f) Región entre el eje OY y la curva $x+y^4=16$.

V.21. Calcula el centroide de cada una de las siguientes regiones de $\mathbb{R}^3$:

a) Cilindro: $\Omega = \Big\{(x, y, z)\ :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ z \in [0, 4]\Big\}$

b) Caja: $\Omega = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$.

c) Cono: $\Omega = \Big\{(x, y, z)\ :\ x^2 + y^2 \leq z^2,\ z \in [0, 1]\Big\}$.

V.22. Calcula el centro de masas de cada una de las regiones siguientes usando la respectiva función de densidad indicada.

a) Región b) del ejercicio **V.20** con densidad $\rho(x, y) = e^{-y} + x$.

b) Región a) del ejercicio **V.20** con densidad $\rho(x, y) = 1 + y$.

c) Región e) del ejercicio **V.20** con densidad $\rho(x, y) = k\,x\,y$, donde $k > 0$ es fijo.

d) Región d) del ejercicio **V.20** con densidad $\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$ donde $k > 0$ es fijo.

e) Región f) del ejercicio **V.20** con densidad $\rho(x, y) = 7$.

V.23. En cada caso del ejercicio anterior calcula el momento de inercia.

V.24. (Junio 2007- Examen final) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

a) Calcule los extremos relativos de f.

b) Halle el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(0, 2, 8)$.

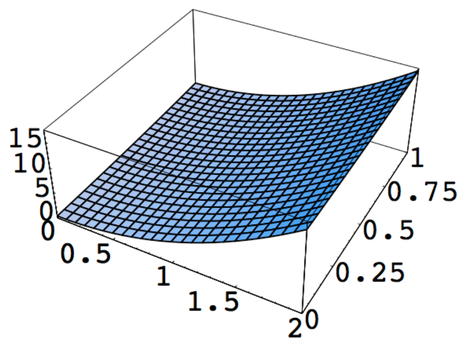
c) Halle el volumen del sólido cuya base inferior es el triángulo de vértices $(2, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$ y $(0, 0, 0)$, su cara superior es la región del plano hallado en el apartado anterior y cuya proyección al plano $z = 0$ es el triángulo anteriormente descrito.

V.25. (Junio 2008- Examen final) Un cierto aislante utilizado en edificación se vende en placas rectangulares de dimensiones $2\pi \times \pi$. La función densidad del material del que está hecho la lámina viene dada por:

$$\rho(x, y) = y^2 \mathrm{sen}^2(4x) + 2 \qquad (x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

y está medida en kg/m^2. Si el material en cuestión se vende a 7 euros/kg, ¿cuál es el valor de cada una de las placas?

V.26. (Diciembre 2007) Calcule el volumen del sólido que se halla bajo la gráfica de la función $f(x, y) = 4x^2 + y^2$ y sobre la región rectangular R situada en el plano XY que tiene vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(2, 0, 0)$ y $(2, 1, 0)$.



Gráfica de la función $f(x, y) = 4x^2 + y^2$