

VI.1. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = x\sqrt{y}$ b) $g(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ c) $h(x, y) = \log\left(\frac{x+y}{x-y}\right)$

VI.2. Demuestra que no existen los siguientes límites:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$

VI.3. Calcula las funciones derivadas parciales de las funciones:

a) $f(x, y) = x^2 \operatorname{sen}^2(x)$ b) $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$
c) $f(x, y) = e^{xy} + \frac{1}{xy}$ d) $f(x, y) = \operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right)$

VI.4. Halla el vector gradiente de las siguientes funciones en los puntos donde exista:

a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(xy)$ b) $g(x, y, z) = \ln(3x^2 - y^2 + z)$

VI.5. Determina la dirección respecto de la cual, la derivada direccional de $f(x, y, z) = xy^2 + yz + z^2x^2$ en el punto $(1, 2, -1)$, es máxima.

VI.6. Halla la derivada de f en el punto A en la dirección del vector \vec{v} que se indica:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $A = (1, 0)$, $\vec{v} = (1, -1)$.
b) $f(x, y) = \cos(xy)$, $A = (2, \pi/4)$, $\vec{v} = (4, -1)$.
c) $f(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2$, $A = (1/2, 1/2)$, $\vec{v} = (\sqrt{3}, 1)$.
d) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$, $A = (1, -1, 2)$, $\vec{v} = (10, 11, -2)$.

VI.7. a) Sean f y g dos funciones reales de variable real derivables en \mathbb{R} . Se define la función de dos variables $z(x, y) = x^2yf(u) + xy^2g(v)$ con $u = \frac{x}{y}$, $v = \frac{y}{x}$. Calcula $xz_x(x, y) + yz_y(x, y)$.

b) Sabiendo que $f(1) = g(1)$ y que $f'(1) = g'(1)$, calcula la derivada direccional máxima de $z(x, y)$ en el punto $(1, 1)$.

VI.8. Dada la función $f(x, y) = x^3 \cos(y) + y - 2$ con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, se pide:

- a) Calcula el plano tangente a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 0, -1)$.
b) Halla el valor máximo de la derivada direccional de f en el punto $(1, 0)$. Indica para qué vector se obtiene dicho valor.

VI.9. Halla la ecuación del plano tangente al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en el punto $A = (2, -1, 5)$.

VI.10. Halla la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $z = xe^{xy-2}$ en el punto $A = (2, 1, 2)$.

VI.11. Estudia los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

b) $f(x, y) = xye^{x+2y} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

c) $f(x, y) = (1 + e^y) \cos(x) - ye^y \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

d) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3pxy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$, según los distintos valores de p .

VI.12. Los cursos de dos ríos (dentro de una región determinada) pueden representarse de manera aproximada por la recta $x - y - 2 = 0$ y la parábola $y = x^2$. Se pretende unir estos ríos por un canal rectilíneo que tenga la menor longitud posible. ¿Por qué puntos habrá de trazarlo?

VI.13. Calcula los puntos del primer octante ($x > 0, y > 0, z > 0$) de la superficie $z = \frac{1}{xy}$ más cercanos al punto $(0, 0, 0)$.

VI.14. Entre los paralelepípedos de superficie S dada, hallar el que tenga mayor volumen.

VI.15. Entre los paralelepípedos rectangulares de volumen V hallar aquel cuya superficie sea menor.

VI.16. Dada la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + x + y$. Halla los máximos y mínimos absolutos de dicha función en el conjunto: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 1\}$.

VI.17. Dada la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - x$. Halla los máximos y mínimos absolutos de dicha función en el conjunto: $D = [0, 1] \times [0, 1]$.

VI.18. a) Halla la matriz jacobiana de la función vectorial $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = (x^2 + 3y^2, 5x^3 + 2y^6).$$

b) Halla la matriz jacobiana en el punto $(0, 0)$ de la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y) = (x + y, e^{x+y}, \text{sen}(x + y)).$$

VI.19. La ecuación $e^y = x^3 + 3y$ determina una función $y = y(x)$ en un entorno del punto $(1, 0)$. Calcula $y'(x)$.

VI.20. La ecuación $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 1 = 0$ determina una función $z = z(x, y)$ en un entorno del punto $(0, 1, -1)$. Calcula $\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1)$ y $\frac{\partial z}{\partial y}(0, 1)$.

VI.21. (Examen final de junio 2008) La cubierta de un edificio ha sido diseñada siguiendo la superficie $z = f(x, y)$ que viene dada en forma implícita por la ecuación $3x^2 + 2y^2 + z^2 - 2y + z + e^{yz} = 4$.

Como parte de un estudio topográfico, se pide que:

a) Obtenga las funciones derivadas parciales de $z = f(x, y)$.

b) Dado el punto $P = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 1\right)$:

b.1.) Compruebe que pertenece a la cubierta del edificio.

b.2.) Halle el valor de la derivada direccional en P según el vector $(2, 1)$.

c) Partiendo del punto $Q = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, ¿en qué dirección debemos ascender por la cubierta para hacerlo lo más rápido posible?

VI.22. (Examen final de junio 2008) Dada la elipse $x^2 + xy + y^2 = 1$, determina la distancia mínima y la distancia máxima de los puntos de esta curva al punto $(0, 0)$.

VI.23. (Examen de septiembre 2008) ¿En qué dirección es igual a 0 la derivada direccional de $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x + y^2}$ en el punto $(1, 1)$?

VI.24. (Examen de septiembre 2008) Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + 3y^2$.

a) ¿Tiene la función f extremos absolutos sobre el círculo $(x - 1)^2 + y^2 \leq 4$? Razona la respuesta.

b) En caso afirmativo calcula los extremos absolutos de f sobre el círculo anterior.

VI.25. (Examen de diciembre 2008)

a) Concepto e interpretación geométrica de la derivada direccional de una función en un punto.

b) Halla a para que la derivada direccional de la función $f(x, y) = e^{ax+3y} \cos(x + y)$ en la dirección del vector $(1, 1)$ en el punto $(0, 0)$ sea $3\sqrt{2}$. Para el valor de a hallado indica la dirección de máximo crecimiento de f en dicho punto.

VI.26. (Examen de diciembre 2008) Un observatorio con planta cuadrada tiene una cúpula con forma de paraboloides. Introduciendo un sistema de referencia cartesiano, los vértices del cuadrado son:

$$A = (3, 3, 0), B = (-3, 3, 0), C = (-3, -3, 0) \text{ y } D = (3, -3, 0).$$

Si el paraboloides es la gráfica de la función $f(x, y) = 9 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{9}y^2$:

a) Calcula el plano tangente y la recta normal a la cúpula anterior en el punto $(3, 3, f(3, 3))$.

b) Calcula el volumen del observatorio.

