**Asignatura: Cálculo Matemático – Curso: 2008-2009**
**Relación de ejercicios del tema I: Números reales . La recta real. Números complejos**

---

**I.1.** Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

**a)** Si $x \in \mathbb{Q}$, entonces $x^2 \in \mathbb{Q}$.
**b)** Si $x \in \mathbb{R}$ es tal que $x^2 \in \mathbb{Q}$, entonces $x \in \mathbb{Q}$.
**c)** Si $x, y \in \mathbb{Q}$, entonces $x + y \in \mathbb{Q}$.

**I.2.** Dé un ejemplo de dos números irracionales cuya suma sea racional y dé un ejemplo de dos números irracionales cuya suma sea irracional.

**I.3.** En cada uno de los siguientes apartados se dan dos números reales. Escriba (sin utilizar la calculadora) en el espacio que hay entre ellos, el símbolo $<$, $>$ o $=$ que le corresponda:

**a)** $-2$ ..... $-3$ **b)** $-2$ ..... $3$ **c)** $\pi$ ..... $3{,}1416$ **d)** $-2(\pi - 4)$ ..... $1{,}5$

**e)** $3^2$ ..... $2^3$ **f)** $3^{-2}$ ..... $2^{-3}$ **g)** $(-3)^{-2}$ ..... $(-2)^{-3}$ **h)** $(-3)^2$ ..... $(-2)^3$

**I.4.** Marque el conjunto indicado en la recta real:

**a)** $\{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 0{,}5\}$
**b)** $\{x \in \mathbb{R} : |x + 2| < 4\} \cup \{x \in \mathbb{R} : |x + 2| < 7\}$
**c)** $\{x \in \mathbb{R} : |x + 2| < 4\} \cap \{x \in \mathbb{R} : |x + 2| < 7\}$

**I.5.** Resuelva:

**a)** $|x| = x + 5$ **b)** $|x| = x - 5$ **c)** $|2x - 6| < 4$

**d)** $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$ **e)** $|2x + 1| \leq 3$ **f)** $x^2 + 6 = |5x|$.

**g)** $|3x - 1| > |2x - 4|$ **h)** $|\mathrm{sen}(x)| = \mathrm{sen}(x) + 1$

**I.6.** Encuentre los valores de $x$ para los que se cumple:

a) $|x - 4| = 9$ d) $|x - 4| + |x + 9| \geq 1$ g) $||x - 9| + |x|| < 0$
b) $|x - 4| \leq 9$ e) $|x - 4| + |x + 9| \leq 1$ h) $|x - 9| + |x| < 0$
c) $|x - 4| \geq 9$ f) $|x - 4| \cdot |x + 9| = 0$ i) $|x - 9| + |x| \leq 0$

**I.7.** Considere los siguientes intervalos: $I_1 = [2, 5]$, $I_2 = (3, 7)$, $I_3 = (-1, 2]$, $I_4 = (1, 9)$, $I_5 = [2, 18)$. Describa explícitamente los conjuntos de $\mathbb{R}$ dados por:

**a)** $I_1 \cap I_2$ **b)** $I_1 \cup I_2$ **c)** $I_1 \cap I_3$ **d)** $I_4 \cap I_5$

**e)** $I_1 \cap I_2 \cap I_3$ **f)** $I_1 \cup I_4$ **g)** $I_1 \cap I_4$ **h)** $I_2 \cap (I_1 \cup I_3)$

**I.8.** Escriba el intervalo dado en forma de conjunto:

**a)** $(2, 2{,}5)$ **b)** $[2, 6]$ **c)** $(0, 0{,}0001]$ **d)** $(1, \infty)$

**e)** $(-1, -0{,}5)$ **f)** $[0, \pi)$ **g)** $(-\infty, 3]$ **h)** $[-e, \infty)$

**I.9.** Determine mayorantes, minorantes, supremo, ínfimo, máximo y mínimo, si los hubiera, de los conjuntos siguientes:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 0\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\,, x^2 + 2x - 3 < 0\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} : \ x^2 + 5x \leq 6\} \quad D = \{x \in \mathbb{R} : x + 2 > 0\,, x^2 + 2x - 3 < 0\}$$

$$E = [1, 2) \cup \{12\} \qquad F = \left\{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

**I.10.** Sea $A$ un subconjunto no vacío de números reales. Demuestre:

**a)** Si $A$ tiene máximo, entonces tiene supremo y $\sup(A) = \max(A)$.

**b)** Si $A$ tiene supremo:

- **i)** Si el $\sup(A) \in A$, entonces $A$ tiene máximo y $\max(A) = \sup(A)$.
- **ii)** Si el $\sup(A) \notin A$, entonces $A$ no tiene máximo.

Demuestre que lo mismo ocurre para el mínimo y el ínfimo.

**I.11.** Indique razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

**a)** Para todo número real $x \in \mathbb{R}$ se verifica la igualdad $\sqrt{x^2} = x$.

**b)** No existe ningún subconjunto de números reales de manera que su supremo y su ínfimo coincidan.

**c)** La igualdad $|x + y| = |x| + |y|$ es cierta para cualesquiera $x$, $y \in \mathbb{R}$.

**d)** $\{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 4\}$.

**e)** Para todo $x$, $y \in \mathbb{R}$, se verifica que $|x - y| > |x| + |y|$.

**f)** Todo conjunto no vacío de números reales que tenga supremo, tiene máximo.

**g)** Todo conjunto no vacío de números reales que tenga máximo, tiene supremo.

**h)** El supremo y el ínfimo del conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x < 3\}$ son, respectivamente, $\dfrac{\sqrt{13} - 1}{2}$ y $\dfrac{-\sqrt{13} - 1}{2}$.

**i)** $\{x \in \mathbb{R} : |x - 8| \leq 2\} = [0, 10]$.

**I.12.** Realice las siguientes operaciones con números complejos:

**a)** $(3 - 2i) + (5 + 6i)$ **b)** $(6 - 5i) - (4 - 7i)$ **c)** $(3 + 4i)(2 - 5i)$

**I.13.** Represente gráficamente los números complejos:

**a)** $3 - 4i$ **b)** $-3i$ **c)** $2 + 3i$ **d)** $-6 - 2i$

**I.14.** Dados los números complejos, $A = 1 - 2i$ y $B = 4 + i$, calcule $A + B$, $A - B$, $A \cdot B$ y $\dfrac{A}{B}$.

**I.15.** Calcule el módulo y el argumento de los siguientes números complejos, representándolos previamente:

**a)** $1 - i$ **b)** $1 + i$ **c)** $i$ **d)** $-i$ **e)** $-1 + i$ **f)** $-1 - i$

**I.16.** Dos conductores de $R_1 = 3 + 4i$ y $R_2 = 8 - 6i$ Ohmios están conectados en paralelo. Calcule $R$ sabiendo que $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$.

**I.17.** Escriba en forma trigonométrica los siguientes números complejos:

**a)** $1 + i$ **b)** $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ **c)** $-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ **d)** -8 **e)** $1 + i\sqrt{3}$ **f)** $i^{126}$

**I.18.** Escriba en forma binómica el número complejo:

a) de módulo 3 y de argumento principal $\dfrac{\pi}{3}$.

b) de módulo 3 y de argumento principal $-\dfrac{\pi}{6}$.

c) de módulo 7 y de argumento principal $\dfrac{2\pi}{3}$.

**I.19.** Considere los números complejos $z = 1 + i$ y $w = 3(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\ \mathrm{sen}(\frac{\pi}{3}))$, calcule:

**a)** $z + w$ **b)** $z^4$ **c)** $\dfrac{1}{z}$ **d)** $zw$ **e)** $\dfrac{z}{w}$

**I.20.** Calcule las raíces cúbicas de $\dfrac{1-i}{1+i}$.

**I.21.** Calcule:

**a)** $\dfrac{(1-i)^{20}}{(1+i)^{12}}$ **b)** $\sqrt[4]{8\sqrt{2} - 8\sqrt{2}i}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{1}{3+4i}}$ **d)** $\dfrac{(1+i)^{100}}{1+i^{100}}$

**I.22.** Encuentre los vértices de un pentágono centrado en el origen, sabiendo que uno de ellos está en el punto $(0, 1)$

**I.23.** Halle las raíces de las siguientes ecuaciones y localízalas en el plano complejo:

a) $z^5 = -1$ b) $(1+i)z^3 - 2i = 0$ c) $z^3 + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}i$

d) $z^4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e) $z^3 - i = 0$

**I.24.** Determine los números complejos de la forma $z = 1 + bi$ tales que $z^2\overline{z} = 1$ (Junio 2007).

**I.25.** Halle los números reales $a$ y $b$ para que el número $\dfrac{4b + 5ai}{5 + 4i}$ sea imaginario puro (esto es con parte real 0) y de módulo unidad.

**I.26.** Halle los números complejos cuyo cuadrado sea igual a su conjugado y represéntalos gráficamente. Halle la ecuación cuyas raíces sean las soluciones del problema.

**I.27.** Halle $a \in \mathbb{R}$ para que $\dfrac{2 + ai}{1 - 2i}$ sea un número real y calcule dicho cociente.

**I.28.** Halle el lugar geométrico de los números complejos que satisfacen:

**(a)** $\left|\dfrac{z+5}{z-3}\right| = 2$ **(b)** $|2z + 3| < 1$ **(c)** $|z + 1| \leq |z - 1|$ **(d)** $|z - i| = |z + i|$ **(e)** $2 < |z| < 3$

**I.29.** Determine los números complejos que satisfacen:

**a)** $z(\overline{z} + 1)$ es real. **b)** $z(\overline{z} + 1)$ es imaginario puro.

**I.30.** Sea $z = r(\cos(\theta) + i\mathrm{sen}(\theta))$, halle $k = \dfrac{(z + \overline{z})(z^2 + \overline{z}^2)\cdots(z^n + \overline{z}^n)}{\cos(\theta)\cos(2\theta)\cdots\cos(n\theta)}$ en función de $r$.

**I.31.** Halle el lugar geométrico de los afijos de los números complejos $z$ tales que $z = \dfrac{t + i}{1 + 2t + i}$ con $t \in \mathbb{R}$.

**I.32.** Determine los números complejos de la forma $z = 1 + b\ i$ tales que $z^2\overline{z} = 1$. (Junio 2007)

**I.33.** La suma de dos números complejos es $2+3i$ y la parte real de uno de ellos es 1. Halle dichos números sabiendo que su cociente es un número complejo imaginario puro. (Septiembre 2008)