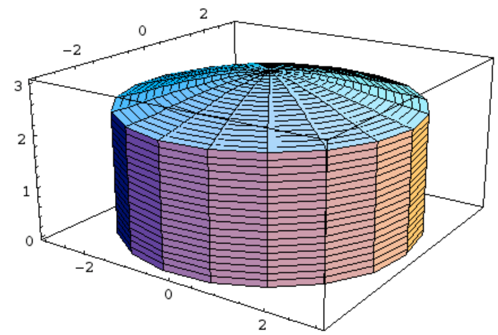
Universidad de Granada | Prueba 4 – (**solución**) | CÁLCULO MATEMÁTICO
Dept. Matemática Aplicada | Teoría | Grupo G
Escuela Univ. Arquitectura Técnica | 25–mayo–2008 | ARQUITECTURA TÉCNICA

Disponible bajo licencia Creative Commons 3.0 España (Juanjo Nieto)
http://www.ugr.es/local/jjmnieto/docencia.html

1. Calcula el volumen que queda bajo una cúpula cuya base es un disco de centro $(0,0)$ y radio 3 y cuya viene altura en cada punto (x,y) viene dada por la ecuación:
$$h = 2 + e^{-\frac{x^2+y^2}{10}}.$$

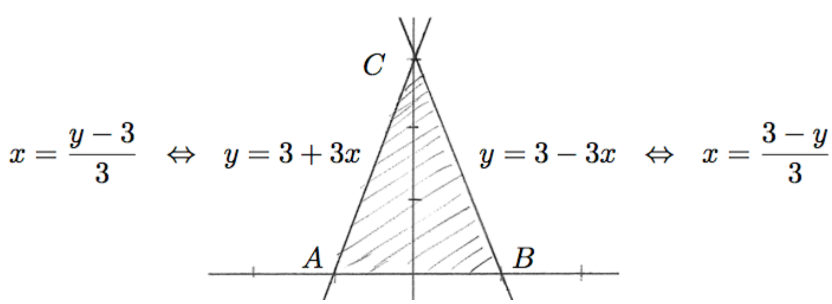


Respuesta: El volumen pedido se calcula mediante la integral siguiente
$$Vol = \int_{B_3(0,0)} 2 + e^{-\frac{x^2+y^2}{10}} d(x,y)$$
que, por estar definida en un dominio circular, calculamos mediante un cambio a polares
$$\begin{aligned} Vol &= \int_{B_3(0,0)} 2 + e^{-\frac{x^2+y^2}{10}} d(x,y) = \begin{bmatrix} x = r\cos(\theta) & \\ y = r\,\mathrm{sen}(\theta) & Jac = r \\ r \in (0,3] & \\ \theta \in [0,2\pi) & \end{bmatrix} = \int_0^3 \left(\int_0^{2\pi} \left(2 + e^{-r^2/10}\right) r\, d\theta \right) dr \\ &= \int_0^3 2\pi \left(2 + e^{-r^2/10}\right) r\, dr = \left[2\pi r^2 - 10\pi e^{-r^2/10}\right]_0^3 = 18\pi - 10\pi e^{-9/10} + 10\pi = \left(18 - 10e^{-0{,}9}\right)\pi. \end{aligned}$$

---

2. Calcula el centro de masas de una figura triangular con vértices: $A = (-1,0)$, $B = (1,0)$ y $C = (0,3)$ y con densidad de masas $\rho(x,y) = y$.

Respuesta: Primero dibujamos el triángulo y describimos las rectas que componen sus lados



Observamos que globalmente la variable y varía entre 0 y 3 y, para cada valor de y, la variable x varía entre los dos valores proporcionados por las ecuaciones de las rectas laterales: $\frac{y-3}{3}$ y $\frac{3-y}{3}$; así
$$\int_\Delta (\text{lo que sea})\ d(x,y) = \int_0^3 \left(\int_{\frac{y-3}{3}}^{\frac{3-y}{3}} (\text{lo que sea})\, dx \right) dy.$$

Pasamos pues a calcular la masa:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^3 \left(\int_{\frac{y-3}{3}}^{\frac{3-y}{3}} y\,dx \right) dy = \int_0^3 y\Big[x\Big]_{\frac{y-3}{3}}^{\frac{3-y}{3}}\,dy = \int_0^3 y\Big(\frac{3-y}{3} - \frac{y-3}{3}\Big)dy = \int_0^3 2y - \frac{2y^2}{3}dy \\ &= \Big[y^2 - \frac{2y^3}{9}\Big]_0^3 = 9 - 2\frac{27}{9} - 0 = 3. \end{aligned}$$

En segundo lugar la componente X del centro de masas:

$$X_M = \frac{1}{M}\int_0^3 \left(\int_{\frac{y-3}{3}}^{\frac{3-y}{3}} xy\,dx \right) dy = \frac{1}{3}\int_0^3 y\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_{\frac{y-3}{3}}^{\frac{3-y}{3}}\,dy = \frac{1}{3}\int_0^3 y\Big(\overbrace{\Big(\frac{3-y}{3}\Big)^2 - \Big(\frac{y-3}{3}\Big)^2}^{=0} \Big)dy = 0.$$

Y por último la componente Y del centro de masas:

$$\begin{aligned} Y_M &= \frac{1}{M}\int_0^3 \left(\int_{\frac{y-3}{3}}^{\frac{3-y}{3}} y^2\,dx \right) dy = \frac{1}{3}\int_0^3 y^2\Big[x\Big]_{\frac{y-3}{3}}^{\frac{3-y}{3}}\,dy = \frac{1}{3}\int_0^3 y^2\Big(\frac{3-y}{3} - \frac{y-3}{3}\Big)dy \\ &= \frac{1}{3}\int_0^3 2y^2 - \frac{2y^3}{3}dy = \frac{1}{3}\Big[\frac{2y^3}{3} - \frac{y^4}{6}\Big]_0^3 = \frac{1}{3}\Big(2\frac{27}{3} - \frac{81}{6}\Big) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el centro de masas es el punto $(0, 3/2)$.

---

3. Comprueba si la función $y(x) = x\,e^{x^2}$ es solución del siguiente P.V.I. o del siguiente P.V.F. o de ambos o de ninguno:

$$P.V.I. \begin{cases} y''(x) = 2x\,y'(x) + 2y(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \qquad P.V.F. \begin{cases} y''(x) = 2x\,y'(x) + 2y(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 2e \end{cases}$$

Respuesta: Como la ecuación es la misma en ambos casos, veamos si la cumple:

Calculamos primero la derivada primera: $y'(x) = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$

y seguidamente la derivada segunda: $y''(x) = 2xe^{x^2} + 4xe^{x^2} + 4x^3e^{x^2} = 6xe^{x^2} + 4x^3e^{x^2}$

por otro lado: $2xy'(x) + 2y(x) = 2x(e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}) + 2(xe^{x^2}) = 4xe^{x^2} + 4x^3e^{x^2}$

y como NO sale lo mismo, pues NO es solución ni del PVI ni del PVF (aunque SI verifique algunas de las condiciones adicionales propuestas).