Universidad de Granada
Dept. Matemática Aplicada
Escuela Univ. Arquitectura Técnica

Prueba 3 – (**solución**)
Teoría
16–abril–2008

CÁLCULO MATEMÁTICO
Grupo G
ARQUITECTURA TÉCNICA

1. Considera la funciónn $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 + 2y^2$; ¿tiene extremos absolutos en el disco $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + y^2 \le 4\}$? Razona la respuesta. En caso afirmativo, calcúlalos.

Respuesta: Dado que el disco D es un conjunto cerrado y acotado (compacto) y la función es continua (por ser polinómica), el Teorema de Weierstrass nos garantiza la existencia tanto de máximo absoluto como de mínimo absoluto.

Pasamos a buscarlos; si los extremos están en el interior del disco, han de ser puntos críticos, y si están en el borde, puntos críticos restringidos, por lo tanto pasamos a buscarlos todos.

• *Puntos críticos*: resuelven el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \boxed{x = 0} \text{ e } \boxed{y = 0}, \text{ único punto crítico: } (0,0).$$

• *Puntos críticos restringidos*: Usamos el método de los multiplicadores de Lagrange. Primero definimos: $L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 + \lambda((x-1)^2 + y^2 - 4)$ y ahora resolvemos

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda(x-1) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 4y + 2y\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = (x-1)^2 + y^2 - 4 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x + x\lambda - \lambda = 0 \\ y(2+\lambda) = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 - 4 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} x + x\lambda - \lambda = 0 \\ \boxed{y = 0} \text{ ó } \boxed{\lambda = -2} \\ (x-1)^2 + y^2 - 4 = 0 \end{array}\right\}$$

-caso $\boxed{y = 0} \Rightarrow$ (sustituyendo en la 3^a) $\Rightarrow\ x^2 - 2x - 3 = 0 \ \Rightarrow \boxed{x = -1}$ ó $\boxed{x = 3}$

-subcaso $\boxed{x = -1} \Rightarrow$ (sustituyendo en la 1^a) $\Rightarrow -1 - 2\lambda = 0 \ \Rightarrow \boxed{\lambda = -1/2}$

-subcaso $\boxed{x = 3} \Rightarrow$ (sustituyendo en la 1^a)$\Rightarrow 3 + 2\lambda = 0 \ \Rightarrow \boxed{\lambda = -3/2}$

-caso $\boxed{\lambda = -2} \Rightarrow$ (sustituyendo en la 1^a) $\Rightarrow\ -x + 2 = 0 \ \Rightarrow \boxed{x = 2} \Rightarrow$ (sustituyendo en la 3^a)

$\Rightarrow -3 + y^2 = 0 \ \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{3}}$ ó $\boxed{y = -\sqrt{3}}$.

Así, los puntos críticos de L son 4: $\{(-1, 0, -1/2), (3, 0, -3/2), (2, \sqrt{3}, -2), (2, -\sqrt{3}, -2)\}$ y los que nos interesan, los puntos críticos restringidos de f, serán: $\{(-1, 0), (3, 0), (2, \sqrt{3}), (2, -\sqrt{3})\}$

Por último, para localizar el máximo y el mínimo, simplemente evaluamos f en los 5 puntos obtenidos:

punto (x, y)	$(0,0)$	$(-1,0)$	$(3,0)$	$(2,\sqrt{3})$	$(2,-\sqrt{3})$
valor de $f(x, y)$	0	1	9	10	10

por lo que el mínimo absoluto es 0 y lo alcanza en el punto $(0, 0)$ y el máximo absoluto es 10 y lo alcanza en 2 puntos $(2, \sqrt{3})$ y $(2, -\sqrt{3})$.

---

2. La ecuación $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 1 = 0$ determina de forma implícita una función $z = z(x, y)$ en un entorno del punto $(0, 1, -1)$. Calcula la dirección en la cual la derivada direccional de z en el punto $(0, 1)$ es mínima.

Respuesta: Como la derivada direccional es mínima en la dirección opuesta al gradiente, lo que tenemos que calcular es justo el gradiente, es decir, las 2 derivadas parciales. Para ello derivamos en la ecuación con respecto a x y con respecto a y (viendo $z \equiv z(x,y)$ como función de x e y).

$$\text{resp. } x: \quad 3x^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} - 3yz - 3xy\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(x,y) = \frac{3yz - 3x^2}{3z^2 - 3xy}$$

$$\text{resp. } y: \quad 6y^2 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial y} - 3xz - 3xy\frac{\partial z}{\partial y} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(x,y) = \frac{2 + 3xz - 6y^2}{3z^2 - 3xy}$$

Sustituyendo en el punto $(0,1,-1)$ obtenemos las parciales:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = \left.\frac{3yz - 3x^2}{3z^2 - 3xy}\right|_{(x,y,z)=(0,1,-1)} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = \left.\frac{2 + 3xz - 6y^2}{3z^2 - 3xy}\right|_{(x,y,z)=(0,1,-1)} = \frac{-4}{3}$$

y por lo tanto la dirección pedida es $\vec{v} = -\nabla z(0,1) = (1, 4/3)$.

---

3. Calcula mediante una integral impropia el área que queda encerrada entre la gráfica de la función $y = \ln(x)$, el eje X y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$.

Respuesta: Como la función logaritmo es negativa entre 0 y 1, el área pedida será:

$$Area = \int_0^1 -\ln(x)\,dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 -\ln(x)\,dx, \text{ (ya que es una integral impropia).}$$

Calculamos primero la integral (por partes) y luego tomamos límite:

$$\int -\ln(x)\,dx = \left[\begin{array}{ccc} u = \ln(x) & \Rightarrow & du = 1/x\,dx \\ dv = -1\,dx & \Rightarrow & v = -x \end{array}\right] = -x\ln(x) - \int(-1)dx = -x\ln(x) + x + C$$

por lo tanto

$$\int_a^1 -\ln(x)\,dx = \Big[x - x\ln(x)\Big]_a^1 = \Big(1 - 1\ln(1)\Big) - \Big(a - a\ln(a)\Big) = 1 - a + a\ln(a)$$

y al tomar límite aparece una indeterminación que resolveremos usando l'Hôpital:

$$Area = \lim_{a\to 0^+}(1 - a + a\ln(a)) = 1 - 0 - \boxed{0\times\infty} \overset{\text{l'Hop.}}{=} 1 - \lim_{a\to 0^+}\frac{1/a}{-1/a^2} = 1 + \lim_{a\to 0^+} a = 1.$$

---

4. Calcula una primitiva de $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x(x-1)^2}$.

Respuesta: Como las raíces del denominador están claras, puesto que está factorizado, pasamos directamente a la descomposición en fracciones simples de f.

$$\frac{2x^2 - 1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x} = \frac{Ax(x-1) + Bx + C(x-1)^2}{x(x-1)^2} = \frac{(A+C)x^2 + (-A+B-2C)x + C}{x(x-1)^2}$$

igualamos los coeficientes de x^2, x y x^0 para obtener:

$$\left.\begin{array}{r} A + C = 2 \\ A - B + 2C = 0 \\ C = -1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} A = 2 - C \\ B = A + 2C \\ \boxed{C = -1} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} \boxed{A = 3} \\ \boxed{B = 1} \\ \boxed{C = -1} \end{array}\right\}$$

y finalmente calculamos la integral

$$\int \frac{2x^2 - 1}{x(x-1)^2}dx = \int \frac{3}{x-1}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx - \int \frac{1}{x}dx = 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \ln|x| + C.$$