| | | |
|---|---|---|
| Universidad de Granada | Prueba 1 – (**solución**) | CÁLCULO MATEMÁTICO |
| Dept. Matemática Aplicada | Teoría | Grupo G |
| Escuela Univ. Arquitectura Técnica | 18–diciembre–2008 | ARQUITECTURA TÉCNICA |

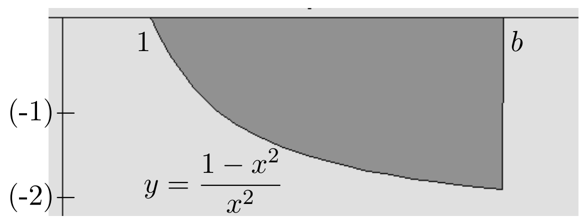
---

1. Enuncia el teorema fundamental del cálculo integral y úsalo para demostrar que la función de acumulación de $f(x) = e^{x^3-1}$ es creciente en $\mathbb{R}$. ¿Son también crecientes las demás primitivas de $f(x)$?

**Respuesta**: Una vez enunciado el teorema (aquí lo omitimos) pasamos a la pregunta: Como la función de acumulación de $f(x) = e^{x^3-1}$ sabemos (por el teorema) que su derivaba es $f$ ¡que es POSITIVA porque es la exponencial de algo!, deducimos que la función de acumulación tiene derivada positiva y por lo tanto es creciente. Esto mismo es aplicable a todas las primitivas de $f$, puesto que $f$ es la derivada de todas ellas.

---

2. Calcula el valor de $b$ (ver dibujo) para que el área sombreada sea igual a 4/3.




**Respuesta**: Teniendo en cuenta que la función es negativa entre 1 y $b$, el área será igual a la integral definida con signo menos; la calculamos:

$$\text{área entre 1 y } b = -\int_1^b \frac{1-x^2}{x^2}dx = \int_1^b 1 - \frac{1}{x^2}dx = \Big[x + \frac{1}{x}\Big]_1^b = b + \frac{1}{b} - 2.$$

Obligamos a que el área sea igual a 4/3 y obtenemos $b$.

$$b + \frac{1}{b} - 2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(b^2 + 1 - 2b) = 4b \Leftrightarrow 3b^2 - 10b + 3 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{5 \pm \sqrt{25-9}}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3 \\ b = 1/3 \end{cases}$$

Y como la segunda solución $b = 1/3$ es menor que 1, no nos vale, de modo que la solución es $b = 3$.

---

3. Verifica que $\displaystyle\int \frac{1}{x-1}\,dx = \mathrm{Ln}\Big(\frac{x^2-1}{x+1}\Big) + C.$

**Respuesta**: Basta ver que la derivada de la función de la derecha es igual al integrando. En este caso, primero simplificamos usando la diferencia de cuadrados:

$$\mathrm{Ln}\Big(\frac{x^2-1}{x+1}\Big) = \mathrm{Ln}\Big(\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)}\Big) = \mathrm{Ln}(x-1)$$

para que la derivada sea aún más fácil de calcular:

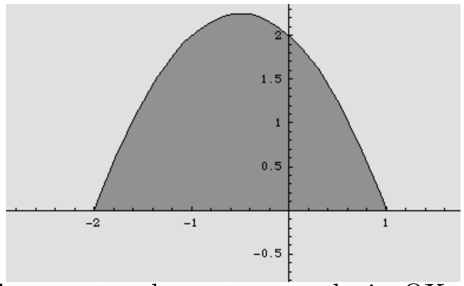
$$\Big(\mathrm{Ln}\Big(\frac{x^2-1}{x+1}\Big)\Big)' = \Big(\mathrm{Ln}(x-1)\Big)' = \frac{1}{x-1},$$

con lo que verificamos que el cálculo de la primitiva es correcto.

---

4. Halla el área que encierra la parábola $f(x) = 2 - x - x^2$ y el eje $OX$ de abscisas.

**Respuesta**: Esbozamos primero la gráfica para tener una mejor idea del área que se pide.




Lo primero que necesitamos son los puntos de corte con el eje OX, ya que estos son exactamente los extremos de integración; para hallarlos resolvemos:

$$-x^2 - x + 2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} b = -2 \\ b = 1. \end{array} \right.$$

Ahora simplemente calculamos la integral definida de la función entre $(-2)$ y 1, que nos dará el área pedida, dado que la función es positiva:

$$\int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)dx = \Big[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_{-2}^{1} = \Big(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) - \Big(-4 - \frac{4}{2} + \frac{8}{3}\Big) = \frac{9}{2}.$$

---

5. Determina cuáles de las siguientes funciones son primitivas de una misma función:

$$F(x) = \frac{-2}{1+x^2}, \qquad G(x) = \frac{1+3x^2}{1+x^2}, \quad y \quad H(x) = x - \frac{2}{1+x^2}.$$

**Respuesta**: Lo más mecánico es hacer la derivada de $F$, $G$ y $H$ y ver qué derivadas coinciden. En este caso, podemos ahorrarnos una, puesto que vemos claramente que $H(x) = x + F(x)$ por lo que NO tienen la misma derivada (o lo que es lo mismo, no pueden ser primitivas de la misma función). Derivamos $F$ y $G$:

$$\begin{aligned} F'(x) &= (-2)(-1)(1+x^2)^{-2}(2x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}, \\ G'(x) &= \frac{(6x)(1+x^2) - (1+3x^2)(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{6x + 6x^3 - 2x - 6x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2}, \end{aligned}$$

Por lo que concluimos que $F$ y $G$ sí son primitivas de la misma función y $H$ no.

---

6. Calcula integrando por partes $\displaystyle\int 2x^3 \operatorname{sen}(x^2)\, dx$.

**Respuesta**: En clase hemos hecho uno igual con el coseno, de modo que omitimos comentarios:

$$\begin{aligned} \int 2x^3 \operatorname{sen}(x^2)\, dx &= \left[ \begin{array}{ccc} u = x^2 & \Rightarrow & du = 2x\, dx \\ dv = (2x) \operatorname{sen}(x^2)\, dx & \Rightarrow & v = -\cos(x^2) \end{array} \right] \\ &= -x^2 \cos(x^2) + \int 2x \cos(x^2)\, dx = -x^2 \cos(x^2) + \operatorname{sen}(x^2) + C \end{aligned}$$

---

7. Da un ejemplo de una función $f(x)$ positiva y que tenga una primitiva $F(x)$ negativa.

**Respuesta**: Dar función $f(x)$ positiva y que tenga una primitiva $F(x)$ negativa, es lo mismo que dar una función $F(x)$ negativa con derivada $F'(x) = f(x)$ positiva, que es lo mismo que dar **una función** $F(x)$ **negativa y creciente**, por ejemplo $F(x) = x$ en el intervalo $[-2, -1]$ que es negativa y cuya derivada $f(x) = 1$ es positiva.

---