Universidad de Granada	Prueba 1 – (**solución**)	CÁLCULO MATEMÁTICO
Dept. Matemática Aplicada	Teoría	Grupo G
Escuela Univ. Arquitectura Técnica	18–diciembre–2008	Arquitectura Técnica

---

1. Describe el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x < 0\}$ como unión de un intervalo y una semirecta y calcula (si los tuviese) su supremo, ínfimo, máximo y mínimo.

Respuesta: Como hemos hecho en clase, primero estudiamos dónde se anula la expresión $x^3 - x$. En este caso:

$$x^3 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; x(x^2-1) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 0, \\ x^2 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x = 1, \\ x = -1, \end{cases} \end{cases}$$

y seguidamente estudiamos su signo a la izquierda y derecha de los 3 puntos obtenidos:

signo $x^3 - x$	$\ominus$	|	$\oplus$	|	$\ominus$	|	$\oplus$
		-1		0		1	

Si observamos por último que la desigualdad que define los puntos de A es estricta (por lo que no incluimos los extremos de los intervalos), concluimos que $A = (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
Ahora es fácil estudiar sus posibles supremo, ínfimo, máximo y mínimo:

- Como A no está acotado por abajo, no tiene ni ínfimo ni mínimo;
- A sí está acotado por arriba y su supremo es claramente el 1;
- como el supremo no pertenece a A, no tiene máximo.

---

2. Halla el lugar geométrico de los complejos cuyo conjugado coincide con su inverso.

Respuesta: Como el inverso de un complejo es $z^{-1} = \bar{z}/|z|^2$, igualamos esta expresión a la del conjugado y vemos qué aparece:

$$\bar{z} = z^{-1} \;\Leftrightarrow\; \bar{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \;\Leftrightarrow\; |z|^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; |z| = 1,$$

es decir, los complejos cuyo módulo vale 1, o dicho de forma geométrica, los complejos que están en la esfera de centro 0 y radio 1:

---

3. Demuestra que $(0, 1)$ es el punto de la gráfica de $f(x) = e^x$ más cercano al punto $(2, -1)$.

Respuesta: Primero calculamos la distancia del punto $(2, -1)$ a un punto genérico $(x, f(x))$ de la gráfica de f:

$$dist\Big((x, f(x)), (2, -1)\Big) := \sqrt{(x-2)^2 + (f(x)-1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (e^x - 1)^2}.$$

Como se trata de minimizar, usamos la función sin la raíz, ya que el mínimo se alzanzará en el mismo punto; por lo tanto tenemos que demostrar que la función:

$$d(x) = (x-2)^2 + (e^x - 1)^2$$

alcanza su mínimo en $x = 0$ (ya que el enunciado me dice dónde debe alcanzarse). Como esta función es siempre derivable, sabemos que el mínimo ha de ser un punto crítico, por lo que calculamos su derivada:

$$d'(x) = 2(x-2) + 2(e^x + 1)e^x$$

y verificamos que $x = 0$ es un punto crítico: $d'(0) = 2+2+0-4 = 0$. Para verificar que es mínimo podemos usar el criterio de la derivada segunda:

$$d''(x) = 2 + 4e^{2x} + 2e^x \;\Rightarrow\; d''(0) = 2 + 4 + 2 > 0$$

y confirmamos que efectivamente es un mínimo relativo. Con esto bastaría, ya que podemos confirmar con un dibujo que el mínimo existe y es único, pero se puede afinar un poco más diciendo que es el único punto crítico ya que la derivada segunda es siempre estrictamente positiva (y si hubiese dos puntos críticos la derivada segunda tendría que anularse en algún punto entre ellos, según el T$^{\text{a}}$. de Rolle) y que de hecho es el mínimo absoluto ya que los límites en $x \to \pm\infty$ son $+\infty$.

---

4. Da un ejemplo de una función derivable que esté acotada superiormente pero no inferiormente.

Respuesta: Hay infinidad de ejemplos; por simplicidad pensemos en funciones elementales (para que sean derivables) que sean siempre negativas (así estarán acotadas superiormente) y que tiendan a $-\infty$ en algún momento (para que no estén acotadas por debajo), por ejemplo:

$$f(x) = -x^2, \quad f(x) = -e^x, \quad f(x) = x, \text{ con dominio } D = (-\infty, 0], \text{ etc.}$$

---

5. Enuncia el Teorema de Rolle y aplícalo para demostrar que la función $f(x) = (3-x)\ln(x)$ tiene un punto crítico en el intervalo $[1, 3]$.

Respuesta: Una vez enunciado el Teorema (no creo que sea necesario repetirlo aquí) basta verificar que la función es derivable entre 1 y 3 (cosa obvia porque es producto de elementales y estamos dentro de su dominio) y que vale lo mismo en $x = 1$ y en $x = 3$; en este caso:

$$f(1) = (3-1)\ln(1) = 2 \times 0 = 0, \qquad \text{y} \qquad f(3) = (3-3)\ln(3) = 0 \times \ln(3) = 0,$$

lo que concluye, según el Teorema de Rolle, que su derivada se anula en algún punto entre 1 y 3, es decir, la función tiene un punto crítico entre 1 y 3.

---

6. Si $y = 3x + 1/2$ es la recta tangente a la gráfica de una cierta función $f(x)$ en el punto 4 y sabemos que $f''(x) = x^2 - 6$, calcula el polinomio de Taylor de grado 2 de la función $f(x)$ en torno al punto $a = 4$.

Respuesta: Como la recta tangente en un punto es lo mismo que el polinomio de Taylor de grado 1, para calcular el de grado 2 basta con añadir el término que falta, es decir:

$$T_2(x; 4) = 3x + 1/2 + \frac{f''(4)}{2}(x-4)^2$$

y como tenemos la derivada segunda, calculamos $f''(4) = 4^2 - 6 = 10$ para concluir:

$$T_2(x; 4) = 3x + 1/2 + \frac{10}{2}(x-4)^2 = 5x^2 - 37x + 80 + 1/2.$$

---

7. Determina una ecuación con coeficientes reales tal que los complejos $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = 2 - 3i$ sean soluciones.

Respuesta: Como z_1 y z_2 son complejos conjugados, basta aplicar la fórmula $x^2 - 2Re(z)x + |z|^2 = 0$, o calcular $(x-z)(x-\bar{z}) = 0$ para encontrar la ecuación pedida: $x^2 - 4x + 13 = 0$.
