Disponible bajo licencia Creative Commons 3.0 España (Juanjo Nieto)
http://www.ugr.es/local/jjmnieto/docencia.html

1. Considera el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 > 0\}$.

a) Describe A como unión de intervalos.

b) Determina, si existen, los mayorantes, minorantes, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de A.

Respuesta: Como hemos hecho en clase, primero buscamos los ceros de $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$. En este caso usamos primero Rufini y luego resolvemos la ecuacin cuadrática que resta:

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -3 & -9 & 10 \\ 1 & & 2 & -1 & -10 \\ \hline & 2 & -1 & -10 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow \quad x_1 = 1 \quad y \quad 2x^2 - x - 10 = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x_2 = (-2), \\ x = \dfrac{5}{2}, \end{cases}$$

y seguidamente estudiamos su signo a la izquierda y derecha de los 3 puntos obtenidos:

signo $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$	$\ominus$	-2	$\oplus$	1	$\ominus$	5/2	$\oplus$

Si observamos por último que la desigualdad que define los puntos de A es estricta (por lo que no incluimos los extremos de los intervalos), concluimos que $A = (-2, 1) \cup (5/2, \infty)$.
Ahora es fácil estudiar sus posibles mayorantes, minorantes, supremo, ínfimo, máximo y mínimo:

- Como A no está acotado por arriba, no tiene ni mayorantes, ni supremo ni máximo. ínfimo ni mínimo;
- A sí está acotado por abajo y el conjunto de minorantes es $(-\infty, -2]$.
- El ínfimo es claramente el -2 y no es mínimo porque no pertenece a A.

---

2. De una función f se sabe que: $f(1) = \dfrac{-\left(9 + 4\pi\sqrt{3}\right)}{135}$ y que

$$f'(x) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2x+1}{x^2+x+1}\right)$$

Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 de la función f en el punto $a = 1$ y utilizalo para obtener una aproximación de $f(1'2)$.

Respuesta: Como el polinomio de Taylor de orden 2 de la función f en el punto $a = 1$ es

$$p(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

y ya tenemos $f(1)$ sólo necesitamos calcular $f'(1)$ y $f''(1)$; vamos a ello. Primero evaluamos f' en $x = 1$:

$$f'(1) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{4\sqrt{3}}{9}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{9}\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{3}\,\pi + 9}{27}$$

y luego volvemos a derivar $f'(x)$ para obtener $f''(x)$ y luego evaluar en 1:

$$f''(x) = \frac{4\sqrt{3}}{9} \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\left(\frac{2(x^2+x+1)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}\right)$$

En lugar de simplificar y después evaluar en 1, primero evaluamos en 1 y después simplificamos, ahorrándonos algunos tediosos cálculos:

$$f''(1) = \frac{4\sqrt{3}}{9} \frac{1}{1+\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)^2} \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\left(\frac{2(3)-(3)(3)}{(3)^2}\right) = \frac{4\sqrt{3}\,2}{9(1+3)\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\frac{(6-9)}{9} = \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{9}$$

Ya podemos describir el polinomio de Taylor:

$$p(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 = \frac{-\left(9+4\pi\sqrt{3}\right)}{135} + \frac{4\sqrt{3}\,\pi+9}{27}(x-1) + \frac{1}{18}(x-1)^2.$$

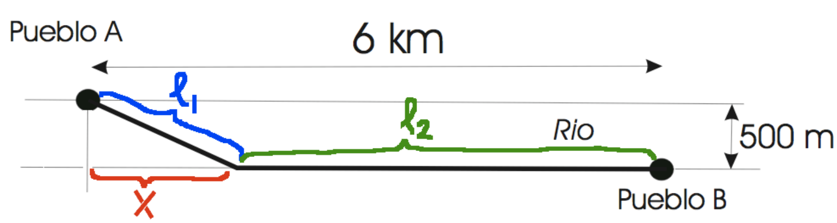
Por último, según lo aprendido, la aproximación de f en el punto $1'2$ es el valor del polinomio $p(x)$ en este punto, es decir $p(1'2) = p(12/10) = p(6/5)$:

$$p\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{-\left(9+4\pi\sqrt{3}\right)}{135} + \frac{4\sqrt{3}\,\pi+9}{27}\left(\frac{1}{5}\right) + \frac{1}{18}\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{-\left(9+4\pi\sqrt{3}\right)}{135} + \frac{4\sqrt{3}\,\pi+9}{135} + \frac{1}{450} = \frac{1}{450}.$$

---

3. Se pretenden conectar con fibra óptica dos pueblos A y B situados a ambos lados de un río (véase la figura siguiente). Por tierra el coste de la conexión es de 30 euros/m y por agua es de 50 euros/m. Calcula el trazado más económico.

Respuesta: Primero definimos (ver siguiente dibujo) la variable x que vamos a usar y dos longitudes adicionales que vamos a necesitar: x será la longitud, en metros, desde el lado de la orilla opuesto al pueblo A más



cercano a este y el punto en el que la fibra de vidrio abandona el agua para ir por tierra (más fácil si se mira el dibujo). l_1 (en azul) es la longitug en metros de la parte de fibra óptica que va por el agua y l_2 (en verde) es la longitud en metros de la parte de fibra óptica que va por tierra.

Con estas variables es fácil describir el coste total de la línea:

$$\begin{aligned}
\text{Coste total} &= (\text{coste del cabreado por agua}) + (\text{coste del cabreado por agua}) \\
&= 50\ \frac{\text{euros}}{m} \times (\text{metros que van por agua}) + 30\ \frac{\text{euros}}{m} \times (\text{metros que van por tierra}) \\
&= (50\ l_1 + 30\ l_2)\ \text{euros}
\end{aligned}$$

Si ponemos l_1 y l_2 en función de x, tendremos ya construida nuestra función de costes dependiente de x. Desde el dibujo (y usando Pitágoras para calcular l_1) deducimos que

$$l_1 = \sqrt{x^2 + (500)^2} \text{ metros}, \qquad l_2 = (6000 - x) \text{ metros}.$$

y la función queda (sin unidades):

$$\text{costes} = f(x) = 50\ l_1 + 30\ l_2 = 50\sqrt{x^2 + (500)^2} + 30(6000 - x)$$

Como nuestro objetivo es buscar el trazado para que el coste sea mínimo, ahora debemos encontrar el valor de la longitud x para que esta función sea mínima. Derivamos e igualamos a cero:

$$f'(x) = 50\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + (500)^2}} - 30 = 0 \iff 5x = 3\sqrt{x^2 + (500)^2} \iff 25x^2 = 9\Big(x^2 + (500)^2\Big)$$

$$\iff 16x^2 = 9(500)^2 \iff |x| = \sqrt{\frac{3^2\ 500^2}{4^2}} = \frac{3 \times 500}{4} = 375 \text{ metros.}$$

Por lo tanto (como x ha de ser positiva) el resultado es óptimo se alcanza para $x = 375$ metros, es decir, pasando de agua a tierra a 5.625 metros del pueblo B.

---

4. Halla los vértices de un pentágono regular centrado en el origen sabiendo que uno de ellos es el $(0, 2)$.

Respuesta: Usando la interpretación geométrica de las raíces (quintas) de un complejo, deducimos del enunciado que el complejo $w_0 = 0 + 2i$ es una de las raíces quintas de un cierto número complejo (en el que no estamos isteresados ahora) y que forma, junto con las otras 4 raíces quintas, un pentágono regular centrado en el origen; por lo tanto tenemos que calcular esas otras 4 raíces quintas, que corresponderán justamente con los 4 vértices restantes. Como el módulo de w_0 es 2 y el argumento es $\pi/2$, podemos usar la fórmula estudiada en clase:

- $w_2 = 2_{\frac{\pi}{2}+1\frac{2\pi}{5}} = 2_{\frac{9\pi}{10}} = 2\Big(\cos\big(\frac{9\pi}{10}\big) + i\,\text{sen}\big(\frac{9\pi}{10}\big)\Big) \equiv \Big(2\cos\big(\frac{9\pi}{10}\big),\ 2\,\text{sen}\big(\frac{9\pi}{10}\big)\Big)$
- $w_3 = 2_{\frac{\pi}{2}+2\frac{2\pi}{5}} = 2_{\frac{13\pi}{10}} = 2\Big(\cos\big(\frac{13\pi}{10}\big) + i\,\text{sen}\big(\frac{13\pi}{10}\big)\Big) \equiv \Big(2\cos\big(\frac{13\pi}{10}\big),\ 2\,\text{sen}\big(\frac{13\pi}{10}\big)\Big)$
- $w_4 = 2_{\frac{\pi}{2}+3\frac{2\pi}{5}} = 2_{\frac{17\pi}{10}} = 2\Big(\cos\big(\frac{17\pi}{10}\big) + i\,\text{sen}\big(\frac{17\pi}{10}\big)\Big) \equiv \Big(2\cos\big(\frac{17\pi}{10}\big),\ 2\,\text{sen}\big(\frac{17\pi}{10}\big)\Big)$
- $w_5 = 2_{\frac{\pi}{2}+4\frac{2\pi}{5}} = 2_{\frac{21\pi}{10}} = 2_{\frac{\pi}{10}} = 2\Big(\cos\big(\frac{\pi}{10}\big) + i\,\text{sen}\big(\frac{\pi}{10}\big)\Big) \equiv \Big(2\cos\big(\frac{\pi}{10}\big),\ 2\,\text{sen}\big(\frac{\pi}{10}\big)\Big)$

---

5. a) Teorema Fundamental del Cálculo Integral. b) Regla de Barrow.

Respuesta: Pues su enunciado y ya está.

---

6. Calcula las siguientes integrales $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln(x)}dx$ y $\displaystyle\int \ln(x)dx$.

Respuesta: La primera es inmediata y la segunda la hacemos por partes:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx &= \left[\textit{tipo} \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln(f(x)) + C\right] = \ln\Big(\ln(x)\Big) + C,\\
\int \ln(x)\,dx &= \left[\begin{array}{ccc} u = \ln(x) & \Rightarrow & du = 1/x\,dx \\ dv = 1\,dx & \Rightarrow & v = x \end{array}\right] x\ln(x) - \int 1\,dx = x\ln(x) - x + C.
\end{aligned}$$

---

7. Comprueba que se verifica la siguiente igualdad $\displaystyle\int \frac{4x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1+3x^2}{1+x^2} + C.$

Respuesta: Para verificar que el cálculo de la integral indefinida (una primitiva salvo constante) es correcto, basta ver que la derivada de la función obtenida a la derecha nos da el integrando. Derivamos pues:

$$\Big(\frac{1+3x^2}{1+x^2}\Big)' = \frac{6x(1+x^2)-(1+3x^2)2x}{(1+x^2)^2} = \frac{6x+6x^3-2x-6x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2},$$

con lo que verificamos que la igualdad es correcta.

Nota: Algunos alumnos deciden calcular directamente la integral indefinida sin usar la función de la derecha, en este caso obtendrían:

$$\int \frac{4x}{(1+x^2)^2}dx = \Big[tipo \int \frac{2\,f'(x)}{(f(x))^2}dx \Big] = \frac{-2}{1+x^2}$$

¡y deciden que la pregunta está mal puesta! El error estaría, en este caso, en no darse cuenta de que ambas funciones, la calculada y la del enunciado, difieren sólo en una constante (y por lo tanto ambas son primitivas de la misma); fijémonos bien:

$$\frac{-2}{1+x^2} + 3 = \frac{-2+3(1+x^2)}{1+x^3} = \frac{1+3x^2}{1+x^2}.$$

---

8. Da un ejemplo de función convexa con una primitiva decreciente, y otro ejemplo distinto de función creciente cuya integral definida en $[0,1]$ sea un número negativo.

Respuesta: Para buscar una función $f(x)$ con una primitiva $F(x)$ decreciente, usaremos que las funciones decrecientes tienen derivada negativa y que la derivada de la primitiva $F(x)$ es la función $f(x)$; por lo tanto buscar una función $f(x)$ con una primitiva $F(x)$ decreciente es lo mismo que dar una función $f(x)$ negativa. Añadimos que $f(x)$ sea convexa y ya está.

Ejemplos: $f(x) = x^2 - 1$ en $[-1,1]$, ó $f(x) = e^x - 1$ en $(-\infty, 0)$, etc.

El segundo ejemplo es mucho más simple; hay mil formas de lograr que la integral definida sea negativa, pero la más sencilla es que la propia función sea negativa en todo el intervalo pedido $[0,1]$, Buscamos pues una función creciente y negativa en el intervalo $[0,1]$:

Ejemplos: $f(x) = x - 1$, $f(x) = x^2 - 1$, $f(x) = e^x - 2$, etc.