MATEMÁTICAS EMPRESARIALES I. Grupos 1º A y 1º B
(L.A.D.E.–Derecho. CURSO 2007/08)
Relación de Ejercicios Nº 5 (entrega voluntaria hasta el 1/feb/08)

Diagonalización de matrices

1. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$
se pide:

   (a) Estudia si el vector $\vec{u} = (-6, 2, 3)$ es o no un vector propio de la matriz A. En caso afirmativo, determina el valor propio asociado.

   (b) Lo mismo para el vector $\vec{v} = (-1, 0, 1)$.

   Solución: $\vec{u}$ sí es vector propio de A, siendo $\lambda = -1$ el valor propio asociado. $\vec{v}$ no es vector propio.

2. Determina los valores propios de las matrices A y A^4, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   Solución: Los valores propios de A son: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -3$ y $\lambda_3 = 2$.

   Los valores propios de A^4 son: $\lambda_1 = 1^4 = 1$, $\lambda_2 = (-3)^4 = 81$ y $\lambda_3 = 2^4 = 16$.

3. Para cada una de las matrices siguientes, analiza si es o no diagonalizable y, si es posible, diagonalízalas:

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (c) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(d) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (e) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad (f) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(g) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (h) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Solución: Son diagonalizables las matrices de los apartados (b), (c), (f) y (g). La diagonalización de estas matrices es:

$$(b) \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (c) \quad P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$(f) \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix};$$

$$(g) \quad P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Calcula A^{100} y, en general, A^k, con $k \in \mathbb{N}$, para la matriz A del apartado (b) del ejercicio 3.

   Solución:
$$A^{100} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{101} & -1 \\ 2^{100} & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^k = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-2)^k & -1 \\ (-2)^k & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Calcula A^k, para k un número impar.

   Solución: $A^k = A$.

6. La matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 & p \\ b & 2 & q \\ c & -1 & r \end{pmatrix}$ admite como vectores propios:

   $\vec{v}_1 = (-1,-1,0)$, $\vec{v}_2 = (1,0,-2)$, $\vec{v}_3 = (0,-1,1)$, asociados a los valores propios $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3/2$, respectivamente.

   (a) Halla los elementos desconocidos de A.

   (b) ¿Es A diagonalizable? En caso afirmativo, diagonalízala.

   Solución:

   a) $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, $p = 1$, $q = 1/2$, $r = 1/2$.

   b) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$

7. Se sabe que la matriz cuadrada de orden tres, A, admite como vectores propios $\vec{v}_1 = (-1,-1,0)$, $\vec{v}_2 = (0,-1,-1)$, $\vec{v}_3 = (-1,0,-1)$, los dos primeros asociados al valor propio $\lambda_1 = 1$ y el último a $\lambda_3 = -1$. ¿Puedes hallar la matriz A? Calcula también A^{67}.

   Solución: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^{67} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

8. Discute para qué valores del parámetro t la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}$ es diagonalizable.

   Solución: A es diagonalizable para cualquier valor real de t.

9. Discute para qué valores del parámetro t la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & t \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, es diagonalizable.

   Solución:

   <u>Caso 1:</u> Si $t = 0$, la matriz A es diagonalizable y las matrices P y D de la relación $A = PDP^{-1}$ son:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   <u>Caso 2:</u> Si $t \neq 0$, la matriz A no es diagonalizable.

10. (feb-07) Estudia si la siguiente matriz es o no diagonalizable. En cualquier caso, calcula un vector propio e indica el valor propio asociado.

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 & -4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

11. (sept-07) Estudia si la siguiente matriz es o no diagonalizable. En cualquier caso, calcula un vector propio e indica el valor propio asociado.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$