MATEMÁTICAS EMPRESARIALES I. Grupos 1º A y 1º B
(L.A.D.E.–Derecho. CURSO 2007/08)
Relación de Ejercicios Nº 4 (entrega voluntaria hasta el 1/feb/08)

Sistemas de ecuaciones lineales

1. Discute los siguientes S.E.L. y, en los casos que corresponda, resuélvelos por el método de Gauss:

$$a)\ \left.\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 0 \\ x & + & 5y & = & 4 \end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 4 \\ -3x & - & 3y & + & 4z & = & 6 \end{array}\right\}$$

$$c)\ \left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 1 \\ 4x & + & 6y & - & 2z & = & 3 \\ 6x & + & 9y & - & 4z & = & -2 \end{array}\right\} \qquad d)\ \left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & y & + & 2z & = & 0 \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \end{array}\right\}$$

Solución: a) es S.C.D. con única solución $x = 12/13$ e $y = 8/13$.

b) es S.C.I. con un parámetro. Su conjunto solución es:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2}{5} - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \frac{9}{5} \end{array} \quad : \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

c) es S.I.

d) es S.C.D. con solución $(0, 0, 0)$.

2. Comprueba si los siguientes sistemas cuadrados son compatibles determinados y, en caso afirmativo, encuentra su única solución.

$$a)\ \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & & & - & 2z & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 2 \\ -x & + & 3y & + & z & = & 3 \end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{rcrcrcr} 6x & + & 3y & - & 3z & = & 6 \\ 3x & + & 9y & & & = & 15 \\ -3x & & & + & 9z & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$c)\ \left.\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & - & z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right\}$$

Solución: Todos son S.C.D. y sus soluciones respectivas son:

$$a)\ \frac{1}{7}(11, 10, 2), \quad b)\ \frac{1}{12}(3, 19, 1), \quad c)\ (0, 0, 0, 0).$$

3. Determina, usando la regla de Crämer, los valores de las incógnitas Y y C en el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcc} Y & = & C + I_0 - G_0 \\ C & = & a - bY \end{array}\right\}$$

donde Y representa el producto nacional y C el consumo privado. El símbolo I_0 es la inversión privada, G_0 el consumo e inversión públicos, a y b son constantes con $b > 1$.

Solución: $Y = \dfrac{a - G_0 + I_0}{1 + b}, \quad C = \dfrac{a + bG_0 - bI_0}{1 + b}.$

4. Determina, usando la regla de Crämer, los valores de las incógnitas Y e i en el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} 0{,}5Y & - & 150i & - & 300 & = & 0 \\ 0{,}4Y & + & 80i & - & 400 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Solución: $Y = 840$ e $i = 0{,}8$.

5. Discute y resuelve, en los casos posibles, cada uno de los siguientes sistemas:

$$a)\ \left.\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 3 \\ x & + & y & = & 2 \end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 7 \\ & & y & + & z & = & 3 \\ -x & + & y & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$c)\ \left.\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 2z & + & 4t & = & 0 \\ 2x & + & y & & & - & t & = & 0 \end{array}\right\} \qquad d)\ \left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & - & z & = & -2 \end{array}\right\}$$

Solución: a) es S.C.D. con solución $(1, 1)$.

b) es S.C.D. con solución $(5, 5, -2)$.

c) es S.C.I. con un parámetro. Su conjunto solución es: $\{(\lambda, -\lambda, -\lambda, \lambda)\ :\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

d) es incompatible.

6. Discute y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas para todos los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$a)\ \left.\begin{array}{rcrcl} 2x & + & y & = & 2 \\ ax & + & 2y & = & a \end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{rcrcrcl} ax & - & y & - & z & = & 1 \\ x & - & ay & - & z & = & 1 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

$$c)\ \left.\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & & & = & 0 \\ ax & + & 2y & - & z & = & 0 \\ & - & y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right\} \qquad d)\ \left.\begin{array}{rcrcrcrcl} x & & & + & az & & & = & 0 \\ & & y & + & z & & & = & 0 \\ -x & + & ay & & & - & t & = & 0 \\ & & & & 3z & + & 4at & = & 1 \end{array}\right\}$$

Solución: Recomendación general: estudiar para qué valores de a se cumple $\det(A) \neq 0$, ya que en este caso se tiene un S.C.D.

a)

Parámetro	Tipo	Solución
$a = 4$	S.C.I.	$\{(x = \lambda,\ y = 2 - 2\lambda)\ :\ \lambda \in \mathbb{R}\}$
$a \neq 4$	S.C.D.	$(1, 0)$

b) Si $a \neq 1$ es S.C.D. con única solución $(0, 0, -1)$. Para $a = 1$ es S.C.I. con dos parámetros. Su conjunto solución es: $\{(1 + \lambda + \mu, \lambda, \mu)\ /\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$.

c) Si $a \neq 5$ es S.C.D. con única solución $(0, 0, 0)$. Para $a = 5$ es S.C.I. con un parámetro. Su conjunto solución es: $\{(\lambda, -3\lambda, -\lambda)\ :\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

d) Para cualquier $a \in \mathbb{R}$ es S.C.D. con única solución $\left(-\dfrac{a}{3}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}, 0\right)$.

7. Discute y resuelve, cuando sea posible, los siguientes sistemas para los distintos valores de $a, b \in \mathbb{R}$:

$$I)\ \left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & ay & + & 3z & = & 12 \\ x & + & y & + & az & = & 2 \\ 2x & - & y & + & 3z & = & b \end{array}\right\} \qquad II)\ \left.\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & z & = & b \\ x & - & y & + & az & = & 4 \\ 5x & + & ay & + & 3z & = & 5 \end{array}\right\}$$

Solución: I) Discusión:

	$a=-1$	$a=3/2$	$a\neq 1,\ 3/2$
$b=12$	S.C.I	S.I.	S.C.D.
$b=52$	S.I.	S.C.I.	S.C.D.
$b\neq 12,\ 52$	S.I.	S.I.	S.C.D.

Soluciones según los casos; si $a=-1$ y $b=12$, el sistema es S.C.I. con un parámetro. Su conjunto solución es:

$$\left\{\left(-\frac{2}{3}(\lambda-7), \frac{1}{3}(5\lambda-8), \lambda\right)\ :\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

Si $a=3/2$ y $b=52$, el sistema es S.C.I. con un parámetro. Su conjunto solución es:

$$\left\{x=-\frac{3}{2}(\lambda-12),\ y=-16,\ z=\lambda\ :\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

Si $a\neq 3/2$ y $a\neq -1$ y para cualquier $b\in\mathbb{R}$ el sistema es S.C.D. con única solución

$$\left(\frac{30+a^2b-3b+6a}{2a^2-a-3}, \frac{12-b}{a+1}, \frac{-32+4a+2b-ab}{2a^2-a-3}\right).$$

II) Discusión:

	$a=1$	$a=2$	$a\neq 1,\ 2$
$b=1/2$	S.C.I.	S.I.	S.C.D.
$b=11/17$	S.I.	S.C.I.	S.C.D.
$b\neq 1/2,\ 11/17$	S.I.	S.I.	S.C.D.

Soluciones según los casos: si $a=1$ y $b=1/2$, el sistema es S.C.I. con un parámetro. Su conjunto solución es:

$$\left\{\left(\frac{1}{6}(9-4z), \frac{1}{6}(2z-15), z\right)\ /\ z\in\mathbb{R}\right\}.$$

Si $a=2$ y $b=11/7$, el sistema es S.C.I. con un parámetro. Su conjunto solución es:

$$\left\{\left(\frac{1}{7}(13-7z), \frac{1}{7}(7z-15), z\right)\ /\ z\in\mathbb{R}\right\}.$$

Si $a\neq 2$ y $a\neq 1$ y para cualquier $b\in\mathbb{R}$ el sistema es S.C.D. con única solución

$$\left(\frac{7+a^2b+3b-9a}{2(a^2-3a+2)}, \frac{-9+10a+3b-5ab}{2(a^2-3a+2)}, \frac{-5+8a-5b-ab}{2(a^2-3a+2)}\right).$$

8. Test: Marca con una X la opción que consideres correcta.

   (feb-07) Si en un S.E.L. $Ax = b$, con 7 ecuaciones y 7 incógnitas se cumple que $rango(A|b) = 7$, entonces...

   - ☐ no puede existir un S.E.L. así.
   - ☐ el S.E.L. es compatible indeterminado.
   - ☐ el S.E.L. tiene una única solución.
   - ☐ el S.E.L. no puede ser compatible indeterminado.

   (sept-07) Si el S.E.L. $Ax = b$, de 4 ecuaciones y 5 incógnitas es compatible indeterminado, entonces...

   - ☐ nos hemos equivocado, no puede existir un S.E.L. así.
   - ☐ el S.E.L. $Ax = 0$ también es compatible indeterminado.
   - ☐ el S.E.L. tiene una única solución.
   - ☐ el rango de A es 4.

9. (feb-07) Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ y resuélvelo sólo en los casos en que resulte compatible determinado, simplificando la expresión final de la solución.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x + 2y + 2az & = & 4 - a \\ x + ay + 2z + az & = & 2a - 1 \\ x + (a-1)y + 2z & = & 2a - 3. \end{array} \right.$$

10. (sept-07) Una óptica va a hacer un pedido de gafas que piensa distribuir en un expositor de 60 unidades con diseños de tres firmas de moda: Agustín–Aflelou, Faustino–Fassion y un tercero que ha entrado con fuerza en el mercado, Vicente–Vogue. Según las tendencias actuales, la óptica pretende colocar 3 gafas de Agustín–Aflelou por cada una de Faustino–Fassion y completar el resto con diseños de Vicente–Vogue, que aún no sabe bien cómo se va a vender. La óptica va a invertir para este menester 1.610 EUR y los precios de las gafas son los siguientes: 20 EUR por las de Faustino–Fassion, 25 EUR por unas de Vicente–Vogue y 30 EUR por unas gafas de Agustín–Aflelou.

    Teniendo en cuenta estos datos, llama “x” al número de gafas de Agustín–Aflelou que irán al expositor, “y” al número de gafas de Vicente–Vogue y “z” al número de gafas de Faustino–Fassion, determina el sistema de ecuaciones lineales que han de verificar estas incógnitas, resuélvelo e indícale a la óptica la distribución de gafas que debe poner en su expositor.