MATEMÁTICAS EMPRESARIALES I. Grupos 1º A y 1º B
(L.A.D.E.–Derecho. CURSO 2007/08)
Relación de Ejercicios Nº 3 (entrega voluntaria hasta el 11/ene/08)

Matrices y determinantes

1. Sean las matrices A y B de orden 4×2 y C, D y E de órdenes 4×5, 2×2 y 5×2, respectivamente. Determina cuáles de las siguientes expresiones matriciales están definidas y, en ellas, determina el orden de la matriz resultante:

   a) BA; b) $AD^t + E$; c)CE; d) $(B + A)D$; e) $C(ED)$; f) BA^t.

2. Para las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \\ -5 & 2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   comprueba que:

   a) $(B + C)^t = B^t + C^t$; b) $(A - D)E = AE - AE$; c) $3(DE) = D(3E)$:

3. Los consumos anuales de pan (1), agua mineral (2) y leche (3) de tres familias vienen expresados en la matriz A de manera que $a_{i,j}$ son las unidades del producto i que consume anualmente la familia j. Por otro lado la matriz B refleja la evolución anual de los precios de dichos productos en los cuatro años comprendidos entre 2001 y 2004, es decir, $b_{i,j}$ es el precio (en céntimos) por unidad del producto i en el año 2000+j.

   Halla, si es posible, AB, BA y A^tB y describe, cuando tenga sentido, el significado de la matriz resultante (lo que cuantifica su componente (i, j)-ésima).

$$A = \begin{pmatrix} 450 & 500 & 480 \\ 500 & 550 & 520 \\ 480 & 530 & 500 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 36 & 60 & 65 & 80 \\ 40 & 44 & 50 & 70 \\ 42 & 50 & 60 & 65 \end{pmatrix}$$

4. Si A y B son matrices cuadradas del mismo orden, desarrolla $(A + B)^2$ y $(AB)^6$. Repite los desarrollos en el caso en que A y B conmuten y simplifícalos.

5. Dada la igualdad matricial

$$A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   determina el orden que ha de tener la matriz A y después calcula todas sus componentes.

6. Halla la expresión general de las matrices A que verifican la ecuación matricial siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Ayuda: una vez hayas deducido que A ha de tener dimensiones 2×3, escríbela de forma genérica $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, determina qué han de cumplir sus componentes y calcúlalas.

7. Comprueba que, en general, del producto de dos matrices simétricas no tiene por qué resultar una matriz que también sea simétrica. Para ello comprueba que las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

son simétricas pero que AB no lo es.

8. Halla la expresión general de las matrices que conmutan con la matriz A del ejercicio anterior.

9. Para cada una de las siguientes matrices, determina una matriz escalonada reducida por filas equivalente a ellas y determina su rango.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 2 & 7 \\ -2 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

10. Repite el ejercicio anterior para la siguiente matriz, pero estudiando el rango según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & a \end{pmatrix}$$

11. Calcula los determinantes de las siguientes matrices y, cuando sea posible, su inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} x & y & x+y \\ y & z & y+z \\ z & x & x+z \end{pmatrix}.$$

12. Sabiendo que A y B son matrices cuadradas de orden 5 y cuyos determinantes son $|A| = (-2)$ y $|B| = 5$, calcula:

    a) $\det(2A)$, b) $|ABA^{-1}B^t|$, c) $\det\left(\frac{1}{|A|}A\right)$, d) $|A^tA|$

13. Determina para qué valores de a y b las siguientes matrices tienes inversa y, para esos valores, calcúlalas.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ a^2 & 2 & -1 \\ a^3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & -1 & 0 \\ -2 & 0 & b & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

14. En cada ecuación matricial, despeja la matriz X en función de las restantes. (Considera que todas las matrices involucradas son cuadradas del mismo orden y con determinante no nulo).

    a) $(AB)^t - BX = C$, b) $(A - BX)^{-1} = X^{-1}B^{-1}$,

    c) $X^t + BX^t = (XA)^t + C^t$, d) $(B + A^tX^t)^{-1} = (X^t)^{-1}$.