

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA MECÁNICA DE LOS MEDIOS CONTINUOS. Curso 07-08

Ejercicio TT3: Resolver una ecuación de transporte

Ejercicio: Calcula la solución $\rho(t, x, y)$ de la siguiente ecuación de transporte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + a_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + a_0 \rho &= 0, & \forall t \geq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ \rho(0, x, y) &= \rho_0(x, y), & \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}\rho_0(x, y) &= \exp\{x + y\}, & a_1(t, x, y) &= 2x, \\ a_0(t, x, y) &= x + y - t, & a_2(t, x, y) &= -3.\end{aligned} \quad \text{J. LUIS TERUEL (JTC)}$$

Paso 1: Plantea y resuelve el sistema característico:

$$\begin{cases} X'(t) = a_1(t, X(t), Y(t)), \\ Y'(t) = a_2(t, X(t), Y(t)), \\ X(s) = x, \quad Y(s) = y, \quad \text{para } s \geq 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Paso 2: Llamando $(X(t; s, x, y), Y(t; s, x, y))$ a la curva característica calculada, describe la solución de la ecuación de transporte usando la fórmula demostrada en clase:

$$\rho(t, x, y) = \rho_0(X(0; t, x, y), Y(0; t, x, y)) \exp \left\{ - \int_0^t a_0(\tau, X(\tau; t, x, y), Y(\tau; t, x, y)) d\tau \right\}.$$

Paso 3: Simplifica todo lo posible la expresión obtenida para $\rho(t, x, y)$ y comprueba que cumple la ecuación de transporte.