FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE LA MECÁNICA DE LOS MEDIOS CONTINUOS. Curso 07-08

Ejercicio TT3: Resolver una ecuación de transporte

Ejercicio: Calcula la solución $\rho(t,x,y)$ de la siguiente ecuación de transporte:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a_1 \frac{\partial \rho}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \rho}{\partial y} + a_0\, \rho = 0, \qquad \forall\ t \geq 0, \quad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$
$$\rho(0,x,y) = \rho_0(x,y), \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

donde:

$$\rho_0(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}, \qquad a_1(t,x,y) = y,$$
$$a_0(t,x,y) = 2, \qquad a_2(t,x,y) = -x.$$

J. LUIS ROMERO (JRB)

Paso 1: Plantea y resuelve el sistema característico:

$$\begin{cases} X'(t) = a_1(t, X(t), Y(t)), \\ Y'(t) = a_2(t, X(t), Y(t)), \\ \\ X(s) = x, \quad Y(s) = y, \quad \text{para } s \geq 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Paso 2: Llamando $(X(t;s,x,y), Y(t;s,x,y))$ a la curva característica calculada, describe la solución de la ecuación de transporte usando la fórmula demostrada en clase:

$$\rho(t,x,y) = \rho_0(X(0;t,x,y), Y(0;t,x,y))\ \exp\Big\{ - \int_0^t a_0(\tau, X(\tau;t,x,y), Y(\tau;t,x,y))\, d\tau \Big\}.$$

Paso 3: Simplifica todo lo posible la expresión obtenida para $\rho(t,x,y)$ y comprueba que cumple la ecuación de transporte.