MÉTODOS NUMÉRICOS. Curso 06-07. $1^{\underline{o}}$. B

Interpolación Polinómica

1. Calcula las bases de Lagrange y de Newton asociadas a los siguientes problemas de interpolación:

   a)

x	-2	0	1
$f(x)$	0	1	1

   b)

x	1	2	0	3
$f(x)$	3	2	-4	5

   c)

x	3	7	1	2
$f(x)$	10	146	2	1

   d) Resuélvelos.

2. Calcula mediante la fórmula de Lagrange una cúbica que pase por los puntos $(-1,2)$, $(0,3)$, $(1,2)$ y $(2,0)$. Repite el cálculo pero usando la fórmula de Newton.

3. Estudia el siguiente problema de interpolación consistente en buscar un polinomio $p \in \mathbb{P}_2[x]$ que cumpla:

   $$p(x_0) = y_0, \qquad p(x_1) = y_1, \qquad p'(x_2) = y_2.$$

   Resuelve el problema para el caso: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

4. Discute si los siguientes problemas de interpolación son unisolventes en $\mathbb{P}_3[x]$:

   a) $p(x_i) = y_i$, $p''(x_i) = y_i''$, $i = 1,2$.

   b) $p(0) = a$, $p(1) = b$, $p'(1) = c$, $p''(2) = d$.

   c) $p(0) = a$, $p'(0) = b$, $p'(2) = c$, $p''(1) = d$.

5. Estudia la existencia y unicidad de solución de cada problema de interpolación:

   a) Buscar $p \in V := \{q \in \mathbb{P}_3[x] : q'(0) = 0\}$ conocidos: $p(0)$, $p(1)$ y $\displaystyle\int_0^1 p(x)\,dx$.

   b) Buscar $p \in \mathbb{P}_2[x]$ conocidos: $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$ y $\displaystyle\int_0^2 p(x)\,dx$.

   c) Buscar $p \in V := \{q \in \mathbb{P}_3[x] : q''(0) = 0\}$ conocidos: $p(x_1)$, $p'(x_2)$ y $p''(x_3)$.

   d) Buscar $p \in \mathbb{P}_2[x]$ conocidos: $p(x_1)$, $p'(x_2)$ y $p''(x_3)$.

6. Consideramos el problema de interpolación siguiente:

   $$\boxed{\text{Buscar } p \in V := \{q \in \mathbb{P}_3[x] : q''(1) = 0\} \text{ tal que: } \begin{cases} p(x_1) = y_1, \\ p(x_2) = y_2 \\ p(x_3) = y_3. \end{cases}}$$

   a) Da una base cualquiera de V y estudia la unisolvencia para $x_i = i$.

   b) Halla la base de Lagrange asociada a los nodos del apartado anterior.

7. La ecuación $x - 9^{-x} = 0$ tiene una solución en $[0,1]$ (aplíquese Bolzano). Halla el polinomio que interpola a $f(x) = x - 9^{-x}$ en los nodos 0, 0,5 y 1. Iguala a cero el polinomio obtenido y resuelve dicha ecuación; observa que la solución calculada se puede considerar como una aproximación de la solución de la ecuación original ($x = 0{,}408004406...$).

8. Construye la tabla de diferencias divididas de la función $f(x) = x^3$ en los puntos $\{0,1,3,4\}$ y, a partir de ellas, escribe el polinomio de interpolación.

9. Demuestra que si $f(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a n, entonces $f[x_0,x]$ es un polinomio de grado menor o igual a $(n-1)$.

10. Calcula la tabla de diferencias divididas con argumentos repetidos y el polinomio de interpolación en $\mathbb{P}_4[x]$ para los datos:

x	0	1	2
$f(x)$	2	-4	44
$f'(x)$	-9	4	

11. (Control feb 05) Justifica razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

   a) Los polinomios $p_1(x) = 1 - x^2$ y $p_2(x) = (x-1)^2$ (distintos pero del mismo grado) interpolan a la función $f(x) = e^x(1-x)$ en los nodos $x = 0$ y $x = 1$.

   b) Dados n nodos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ cualesquiera y distintos y n valores $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ cualesquiera (siendo n un número natural arbitrario), existe una única función de la forma
   $$f(x) = e^{a_0 x} + e^{a_1 x} + \ldots + e^{a_n x}, \text{ con } a_i \in \mathbb{R},$$
   que verifica $f(x_i) = y_i$ para cada $i = 0, 1, ..., n$.

   c) La siguiente tabla de diferencias divididas con argumentos repetidos (incompleta) corresponde al polinomio de interpolación $p(x) = x^4 - x - 1$:

x_i	y_i					
0	-1					
0			1			
		0				
1						
				1		0
1						
				0		
-1	1		2			
		-5				
-1	1					

   d) Si $f(x) = 2x^4 - 1$, entonces $f[-2,-1,0,1,2] = 0$.

   e) Si en el problema de interpolación de Lagrange todos los valores son positivos, entonces el polinomio de interpolación también es positivo (es decir, $p(x) \geq 0$ para cualquier x).

12. (Control feb-05) Una empresa de control de calidad está estudiando la cantidad en agua de un cierto mineral y han realizado las siguientes mediciones:

Hectolitros de agua	1	1.5	2	2.5
Cantidad de mineral en miligramos	32	41	48	53

Estima cuántos miligramos de mineral podrán encontrarse en 1.6 hectolitros de agua; para ello haz la tabla de diferencias divididas asociada a estos datos y calcula el polinomio de interpolación mediante la fórmula de Newton.

Navegando por internet descubren que otra empresa hizo un estudio similar, encontrando 59 miligramos del mineral en 3 hectolitros de agua. Calcula el nuevo polinomio de interpolación.

13. (Examen jul-05) Este ejercicio consiste en probar la fórmula

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{para todo } n \text{ natural.}$$

Para ello vamos a interpolar una función $f(x)$ que, sobre cada natural, toma el valor:

$$f(n) = 1+2+3+\ldots+n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Usa la tabla de diferencias divididas para justificar que el polinomio que interpola a f en 1,2,3,...,n es de grado 2.

(ii) Usando la fórmula de Newton, demuestra que $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

14. (Examen sep-05) Se considera el polinomio: $p(x) = x^4 + 2x^2 - 7x - 2$. Construye el polinomio (del grado adecuado para que el problema de interpolación sea unisolvente) que interpola a $p(x)$ en todas sus raíces reales.

15. (Control feb-06) Justifica razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

a) Si llamamos $p(x) \in \mathbb{P}_4[x]$ al polinomio que interpola a la función $f(x) = (x+1)^2(2x-3)^2$ en los nodos $\{-2,-1,0,1,2\}$, entonces, el coeficiente líder de $p(x)$ es 6.

b) Si en el problema de interpolación de Hermite siguiente:

x	0	1
$f(x)$	y_0	y_1
$f'(x)$	y'_0	y'_1

se cumple que $y_0 < y_1$ y que tanto y'_0 como y'_1 son positivas, entonces el polinomio de interpolación es una función creciente (es decir, $p'(x) \geq 0$ para cualquier x).

c) Si f es producto de dos funciones $f(x) = g(x)h(x)$ entonces se verifica que:

$$f[x_0,x_1] = g[x_0]\,h[x_0,x_1] + g[x_0,x_1]\;h[x_1].$$

16. (Control feb-06) Aproxima el valor de $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$ por el de la integral del polinomio que interpola a $f(x) = e^{-x^2}$ usando datos:

a) ... de tipo Lagrange en los nodos $\left\{-\frac{2}{3},\ 0,\ \frac{2}{3}\right\}$.

b) ... y de tipo Hermite en los nodos $\left\{-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right\}$.

c) Sabiendo que $I = 1{,}4936482656248544...$ indica el error relativo cometido al aproximarlo por la integral de los dos polinomios de interpolación.

d) Llamando $p_L(x)$ y $p_H(x)$ a los polinomios obtenidos en la interpolación de Lagrange y de Hermite respectivamente, da dos aproximaciones del valor de $f(0)$ usando sendos polinomios y determina el error absoluto cometido.

17. (Control feb-06) Test:

a) Al resolver un problema de interpolación polinómica de Lagrange en $\mathbb{P}_7[x]$ usando los valores de una cierta función en 8 nodos diferentes hemos obtenido un polinomio de grado 5. Entonces:

☐ en $\mathbb{P}_7[x]$ no hay unicidad.

☐ en $\mathbb{P}_6[x]$ puede no haber solución.

☐ en $\mathbb{P}_8[x]$ hay unicidad y se obtiene el mismo polinomio.

☐ en $\mathbb{P}_6[x]$ hay unicidad y se obtiene el mismo polinomio.

b) La siguiente tabla de diferencias divididas con argumentos repetidos (incompleta):

x_i	y_i					
0	2					
0						
1		3	2			
1						
-1	1			6		
-1	1	-4	3	2		1

corresponde al polinomio de interpolación...

☐ $p(x) = x^5 + 4x^4 - 3x^2 + x + 2.$

☐ $p(x) = x^5 + 4x^4 - x^3 - 5x^2 + 2.$

☐ $p(x) = x^5 + 5x^4 + 11x^3 + 2x^2 + x + 2.$

☐ $p(x) = x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 2.$

c) Si pretendemos encontrar un polinomio $p(x)$ de la forma $p(x) = ax^2 + b(x^2 - 2) + c$ que verifique las condiciones: $p(0) = -4$, $p(1) = 1$ y $p(2) = 16$, ...

☐ ... no encontraremos ninguno.

☐ ... podemos encontrar varios diferentes.

☐ ... encontraremos sólo uno.

☐ ... como $p(x) = (a+b)x^2 + (c - 2b)$ no tiene término de grado 1, hay que eliminar una de las condiciones para poder plantearse el problema de interpolación.