MÉTODOS NUMÉRICOS. Curso 06-07. 1$^{\underline{o}}$. B

Resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales

1. Utilizando la descomposición LU de Doolittle, resuelve $A.x = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y } \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

    a) Comprueba que A admite descomposición LU y calcula una.

    b) Comprueba que B no admite descomposición LU.

    c) Da una permutación de las filas de B que admita descomposición LU y calcúlala.

    d) Calcula $k(A)$ y $k(B)$ con las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$

3. Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, aunque sea simétrica, no admite descomposición de Cholesky. ¿Será definida positiva? Calcula $x^t.A.x$ para el vector $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Determina razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    a) La inversa de una matriz simétrica regular es simétrica regular.

    b) Si A admite una descomposición LU entonces es regular.

    c) De 2 matrices A y B sabemos que $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y que $A-B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 81 & 9 & 0 \\ 9 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

    a) Descomponla, si es posible, por el método de Cholesky.

    b) Si x es un vector no nulo de $\mathbb{R}^n$ ¿qué puedes decir del producto $x^t.A.x$?

    c) Calcula las dos primeras iteraciones del método de relajación con $w = 1$ para aproximar la solución del sistema $A.x = (2,2,2)^t$ tomando como aproximación inicial $x^{(0)} = (1,1,1)^t$.

    d) Justifica si dicho método converge.

6. Halla un valor aproximado de la solución del sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 9x-2y & & =5, \\ -2x+4y & -z & =1, \\ -y & +z & =-5/6, \end{array}\right.$$

aplicando 5 veces el método de Jacobi, el método de Gauss-Seidel y el método de relajación con $w=1{,}2$; toma en los tres casos $x^{(0)}=y^{(0)}=z^{(0)}=0$ y usa sólo 4 cifras decimales.

Sabiendo que la solución exacta es $x=2/3$, $y=1/2$ y $z=-1/3$ interpreta los resultados.

7. Consideramos el sistema:

$$\left\{\begin{array}{rr} 8x+y+z= & 26, \\ x+5y-z= & 7, \\ x-y+5z= & 7. \end{array}\right.$$

a) Calcula la solución exacta mediante el método de Gauss.

b) Calcula la solución exacta usando una descomposición LU.

c) Aproxima la solución usando el método de Gauss-Seidel operando con 3 decimales y partiendo de $x^{(0)}=(0,0,0)^t$.

d) Justifica si el método de Jacobi converge.

8. Consideramos el siguiente sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Si intentamos aplicar el método de Jacobi nos encontramos con que $\rho(B_J)=3{,}4827$, ¿habrá convergencia? Encuentra una forma de poder aplicar el método de Jacobi de manera que sea convergente y aproxima la solución partiendo de $x^{(0)}=(0,0,0)^t$.

9. (Control ene-05) Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Dada una matriz A ortogonal, el sistema $Ax=Bx-b$ tiene solución cuando B es también ortogonal.

b) Al calcular una solución aproximada x_0 del sistema $\frac{1}{100}Ax=b$ se tienen los siguientes datos: el condicionamiento de A es $K(A)=10^6$, la norma de b es 100 y el residuo $\|\frac{1}{100}Ax_0-b\|$ es 1. Entonces el error relativo cometido está entre 10^{-8} y 10^4.

c) Si una matriz $A\in\mathcal{M}_{8\times 8}$ tridiagonal cumple que $a_{i,j}=0$ cuando $i-j=0$, entonces o es la matriz cero o es es antisimétrica.

d) Todas las matrices simétricas, si son regulares, admiten descomposición LU.

e) Si A es estrictamente diagonal dominante entonces para resolver $Ax=b$ los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen pero no Relajación para ningún $\omega>0$.

f) Para el sistema $Ax = b$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ el método de Jacobi converge y la matriz B_J asociada al método $x^{(n+1)} = B_J x^{(n)} + c_J$ es $B_J = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. (Control ene-05) Consideramos el S.E.L. $Ax = b$, del que se conoce una descomposición LU como la que sigue

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & a_{1,3} \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & a_{3,2} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{pmatrix} = LU.$$

a) Deduce los valores omitidos en cada matriz.

b) Usa esa descomposición para calcular la solución del sistema $Ax = b$ para $b = (7, 10, 5)$.

c) Escribe las ecuaciones del método iterativo de Gauss–Seidel y calcula 2 iteraciones a partir de la iteración inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.

11. (Control ene-05) Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ es definida positiva, entonces es regular y $\alpha = 2$

b) Si A y B son matrices tales que $AB = BA$, entonces bien una de ellas es invertible bien ambas son simétricas.

c) Toda matriz que se descomponga en la forma $A = LL^t$ (con L triangular inferior) es definida positiva.

d) Cierto método iterativo tiene por matriz asociada $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$, por lo que no converge dado que $\|B\|_1 = 1$.

12. (Examen jul-05) Dado el S.E.L.

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 3x - 3y - z + 8t & = & 1 \\ x + 4y + t & = & 5 \\ 4x + y - z & = & 6 \\ x + y + 4z & = & -2 \end{array} \right.$$

a) Comprueba que no se puede aplicar directamente el método de Gauss–Seidel.

b) Reordena las ecuaciones para garantizar que el método de Gauss-Seidel es aplicable y converge.

13. (Control enero-06) Indica, exponiendo claramente las razones, la veracidad o falsedad de cada una de las afirmaciones siguientes.

a) Toda matriz diagonal y regular admite una descomposición del tipo $A = LL^t$.

b) Siempre que sea posible aplicarle el método de Gauss–Seidel a un sistema dado, la correspondiente matriz B_{GS} obtenida tienes ceros en todos los elementos de su diagonal.

c) Si partimos de un sistema diagonal $Dx = b$, con $det(D) \neq 0$ entonces $B_J = 0$ y por lo tanto el método aproximado de Jacobi se convierte en exacto, ya que en la primera iteración se alcanza la solución exacta y las posteriores iteraciones son iguales.

d) Si aplicamos al siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcr} 5x+y & = & 7 \\ x+2y-z & = & -1 \\ -y+3z & = & 4 \end{array}\right\}$$

el método de relajación con $\omega = 3/2$, obtendremos convergencia.

14. (Control ene-06) Consideramos el S.E.L. $Ax = b$, del que se conoce parcialmente una descomposición LU como la que sigue

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & b \\ -1 & 9 & 3 \\ 2 & c & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ d & e & 0 \\ f & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g & -1 \\ 0 & -5 & h \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = LU.$$

a) Deduce los valores omitidos en cada matriz.

b) Usa esa descomposición para calcular la solución del sistema $Ax = b$ con $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

c) Escribe las ecuaciones del método iterativo de Gauss–Seidel y calcula 3 iteraciones a partir de la iteración inicial $\begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) Teniendo en cuenta que la matriz B_{GS} es:

$$B_{GS} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} 0 & -27 & 27 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 25 & -4 \end{pmatrix}$$

y que sus valores propios son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \left(\text{-0.13-0.45}\,i\right)$ y $\lambda_3 = \left(\text{-0.13+0.45}\,i\right)$, ¿convergerá el método de Gauss–Seidel?

15. (Examen jun-06) ¿Coinciden los métodos de Jacobi y de relajación con peso $\omega = 1$ para un sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ en el que la matriz A es triangular superior? Responde razonadamente.

16. (Examen sep-06) Haz una descomposicón de Cholesky de la matriz de coeficientes del siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 16 \end{pmatrix}$$

y resuélvelo usando dicha descomposición.