MÉTODOS NUMÉRICOS. Curso 06-07. $1^{\underline{o}}$. B

Resolución de ecuaciones I (ecuaciones polinómicas $p(x) = 0$)

1. Dado el polinomio $p(x) = x^3 + 5x - 4$:

   (a) mediante la teoría de Sturm, comprueba que $p(x)$ tiene una única raíz real y localízala en un intervalo de amplitud unidad.

   (b) Demuestra que r es la raíz de $p(x)$ si y sólo si r es un punto fijo de la función

   $$g(x) = \frac{4}{x^2 + 5} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   (c) Prueba que el método iterativo asociado a la función g es convergente en el intervalo $[0, 1]$ y deduce el orden de convergencia de dicho método.

2. Separa las raíces reales de las ecuaciones

   $$x^3 - x^2 - x - 1 = 0, \qquad 2x^3 + x^2 - 5x - 3 = 0 \text{ (Control nov-04)}$$

   en intervalos de amplitud unidad mediante la teoría de Sturm.

3. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

   (a) Sea $f(x)$ una función. Entonces, si $f(a)f(b) < 0$, por el teorema de Bolzano, existe al menos una raiz en el intervalo $[a, b]$.

   (b) Si $g'(x) < 1$, $\forall x \in [a, b]$, entonces el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$, $x_0 \in [a, b]$, converge.

   (c) ¿Existe una función $g(x)$ tal que los primeros términos de la sucesión $\{x_n\}$, generada por el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ sean $\{1, 1.5, 2, 1.5, 1, 0, 3, \ldots\}$?

   (d) Si un polinomio tiene todos sus coeficientes positivos, entonces no puede tener raices reales negativas.

   (e) Si un polinomio de grado 7 tiene todas sus raices reales y simples entonces la sucesión de Sturm asociada al polinomio tiene 8 funciones.

   (f) Sea $\{f_0, f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ una sucesión de Sturm. Entonces, si tomamos m números positivos $\{a_i > 0,\ i = 0, \ldots, m\}$, la sucesión $\{a_0 f_0, a_1 f_1, a_2 f_2, \ldots, a_m f_m\}$ también es de Sturm.

   (g) Si en la construcción de la sucesión de Sturm asociada a un polinomio $p(x)$ de grado $2n$ ocurre que el último resto no nulo obtenido $-f_m(x)$ es un polinomio de grado n con todas sus raices simples, entonces todas las raices de $p(x)$ son dobles.

4. Demuestra que el método de Steffensen aplicado a la sucesión $x_{n+1} = x_n + f(x_n)$ para resolver la ecuación $f(x) = 0$, conduce al método

   $$x_{n+1} = x_n - \frac{(f(x_n))^2}{f(x + f(x)) - f(x)}.$$

5. (Examen sept-04) Se considera el siguiente polinomio: $p(x) = x^4 + 2x^2 - 7x - 2$.
   (a) Separa todas las raíces reales de la derivada de $p(x)$ en intervalos de longitud uno mediante una sucesión de Sturm.
   (b) Demuestra que para cualquier aproximación inicial x_0 en el intervalo $[1,8]$ el método de Newton–Raphson para resolver $p(x) = 0$ converge.
   (c) Aproxima la raíz positiva de $p(x)$ usando el método de Newton-Raphson a partir de la aproximación inicial $x_0 = 2$ deteniendo el proceso cuando la distancia entre dos iteraciones sucesivas sea menor que 10^{-4}.

6. (Control nov-04) Considera la ecuación polinómica $x^3 - 3x + 1 = 0$ y responde, razonadamente, las cuestiones siguientes:
   (a) ¿Qué intervalo contiene todas las raíces reales?
   (b) Calcula una sucesión de Sturm para la ecuación tomando $f_0 = x^3 - 3x + 1$ y $f_1 = x^2 - 1$.
   (c) ¿Cuántas raíces reales tiene la ecuación? Sepáralas en intervalos de amplitud unidad.

7. (Control nov-05) Determina en cada apartado las opciones correctas:
   - Consideramos un polinomio $p(x)$ de grado n con, al menos, $m+1$ raíces reales simples contenidas en el intervalo $[a,b]$. Bajo estas condiciones, una sucesión de Sturm asociada a dicho polinomio sobre el intervalo $[a,b]$:

     ☐ tiene al menos $(m+2)$ funciones.
     ☐ tiene al menos $(m+1)$ funciones.
     ☐ tiene a lo sumo n funciones.
     ☐ tiene a lo sumo $(n-m+1)$ funciones.
   - Dada una sucesión de Sturm $\{f_0, f_1, \ldots, f_m\}$ en el intervalo $[a,b]$ con $a > 0$:

     ☐ $\{e^x f_0, e^x f_1, \ldots, e^x f_m\}$ también es de Sturm en $[a,b]$.
     ☐ $\{\ln(x) f_0, \ln(x) f_1, \ldots, \ln(x) f_m\}$ también es de Sturm en $[a,b]$.
     ☐ $\{f_0^2, f_1^2, \ldots, f_m^2\}$ también es de Sturm en $[a,b]$.
     ☐ $\{f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}, f_m^2\}$ también es de Sturm en $[a,b]$.

8. (Examen dic-05) Si $\{f_0, f_1, \ldots, f_m\}$ es una sucesión de Sturm, entonces la sucesión $\{\bar{f}_0, \bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_m\}$, donde $\bar{f}_i(x) = e^x f_i(x)$ para cada $i = 0, 1, \ldots, m$, es también de Sturm.

9. (Examen jul-06) Determina mediante el teorema de acotación de Sturm un intervalo que contenga todas las raíces reales del siguiente polinomio: $p(x) = (x - \frac{1}{2})^2 (x-2)(x + \frac{1}{2})^2$. Calcula una sucesión de Sturm asociada y, valiéndote de ella, localiza dichas raíces en intervalos de longitud 1.