Universidad de Granada
Facultad de Ciencias
Dept. Matemática Aplicada

MÉTODOS NUMÉRICOS
Grupo B
Licenciatura en Matemáticas

2ª prueba de evaluación continua

7-ene-07

Resolución numérica de SEL e interpolación polinómica

1. Justifica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   (a) Si una matriz A se puede descomponer de la forma $A = BB^t$, siendo B alguna matriz cuadrada, entonces A es definida positiva.

   $\boxed{\text{FALSO}}$ Tómese como contraejemplo $B = 0$.

   (b) Para resolver un sistema $Ax = b$ se tienen 2 métodos convergentes $x_{n+1} = B_1 x_n + c_1$ y $x_{n+1} = B_2 x_n + c_2$. Entonces el método $x_{n+1} = (B_1 + B_2)x_n + (c_1 + c_2)$ también es convergente para el mismo sistema.

   $\boxed{\text{FALSO}}$ El método propuesto (aunque convergiese a algún $x \in \mathbb{R}^n$) no sería una solución de mismo sistema (falla la consistencia) ya que x ha de cumplir

   $$\left.\begin{array}{l} x = B_1 x + c_1 \\ x = B_1 x + c_1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = (B_1 + B_2)x + (c_1 + c_2), \text{ y no } x = (B_1 + B_2)x + (c_1 + c_2),$$

   de modo que sólo sería consistente si $2x = x$, es decir, si $x = 0$; cualquier sistema con solución no nula sirve de contraejemplo.

   (c) Si un sistema tiene matriz de coeficientes regular y triangular inferior, entonces el método de Gauss–Seidel se convierte trivialmente en exacto, alcanzando la solución exacta en un número finito de pasos.

   $\boxed{\text{VERDADERO}}$ Lo podemos ver matricialmente ya que al ser triangular inferior $A = D - L - U$ con $U = 0$ y $B_{GS} = (D - L)^{-1} U = 0$ y por lo tanto en el primer paso de Gauss–Seidel se tiene $x^1 = B_{GS} x^0 + c_{GS} = c_{GS}$ al igual que todas las siguientes iteraciones, es decir, la solución es $x = c_{GS}$ y se alcanza en un paso.

   (d) Si $f(x)$ es una función derivable en todo $\mathbb{R}$ y definimos la función $g(x) = f[x, x_0]$, entonces se verifica que

   $$g'(x) = \frac{f'(x) - g(x)}{x - x_0}.$$

   $\boxed{\text{VERDADERO}}$ Basta desarrollar la diferencia dividida $f[x, x_0] = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ y derivar:

   $$g'(x) = \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)' = \frac{f'(x)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^2} = \frac{f'(x) - \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)}{x - x_0}.$$

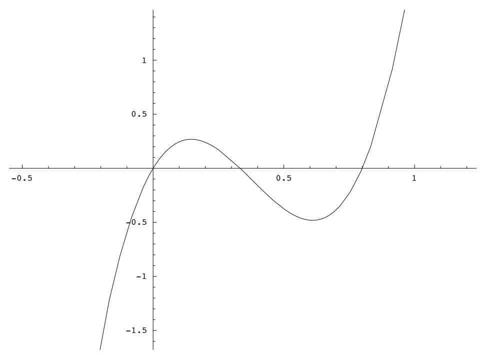
(e) Al resolver el siguiente problema de interpolación de tipo Hermite

x	0	1
y	y_0	y_1
y'	y'_0	y'_1

cumpliendo $\begin{cases} y_0 < y_1 \\ 0 < y'_0 \text{ y } 0 < y'_1 \end{cases}$

el polinomio de interpolación resultante estrictamente creciente.

$\boxed{\text{FALSO}}$ Basta tomar los datos de cualquier polinomio que NO sea creciente, de grado 3 para que su interpolado sea él mismo, procurando que en 0 y 1 cumpla los datos pedidos, es decir, un polinomio de grado 3 tal y como el de la siguiente figura:



que podemos escribir analíticamente si, por ejemplo (basándonos en la idea intuitiva del dibujo), buscando uno con ceros en $x = 0$, $x = 1/3$ y $x = 3/4$, por ejemplo $p(x) = x(3x-1)(4x-3) = 12x^3 - 13x^2 + 3x$.

(f) Al interpolar una función $f(x)$ cualquiera en 5 puntos diferentes sabemos que puede haber varios polinomios de grado menor o igual a 5 que la interpolen; pero si la función de partida es un polinomio de grado 3, entonces el único polinomio de grado menor o igual a 5 que lo interpola es él mismo.

$\boxed{\text{FALSO}}$ En el enunciado está la respuesta: “Al interpolar una función $f(x)$ cualquiera en 5 puntos diferentes sabemos que puede haber varios polinomios de grado menor o igual a 5 que la interpolen”, añadimos simplemente: “tómese como $f(x)$ un polinomio de grado 3” (si para cualquier función hay muchos polinomios interpoladores, para nuestra función particular también, sea quien sea).

2. Para intentar aplicar directamente el método de Jacobi y resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + 3z &= 7 \\ 8x + 3y + z &= 5 \\ 3y + 2z &= -1 \end{cases}$$

hemos calculado el radio espectral de la matriz B_J y ha resultado ser $\rho(B_J) = 2.362$,

(a) ¿convergerá este método? En caso negativo, permuta las ecuaciones de forma adecuada para que al aplicar nuevamente Jacobi sí se obtenga convergencia; justifica en cualquier caso tus respuestas.

Solución: NO converge porque es necesario que $\rho(B_J) < 1$ y esto NO se cumple.

Permutamos las filas para que la matriz de coeficientes resultante sea estrictamente diagonal dominante ya que, en este caso, sabemos que Jacobi sí converge.

$$\left\{\begin{array}{rl} 8x+3y+\ \ z &= 5 \\ 3y+2z &= -1 \\ x \qquad +3z &= 7 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ es EDD}$$

(b) Indica las ecuaciones de Jacobi del método que finalmente crees que es convergente, y realiza tres iteraciones del mismo comenzando con el punto inicial $(1,-1,1)$.

Solución: Las ecuaciones de jacobi son

$$\left\{\begin{array}{ll} x^{(n+1)} & = \dfrac{1}{8}\Big(5-3y^{(n)}-z^{(n)}\Big) \\ y^{(n+1)} & = \dfrac{1}{3}\Big(-1-2z^{(n)}\Big) \\ y^{(n+1)} & = \dfrac{1}{3}\Big(7-2x^{(n)}\Big) \end{array}\right.$$

y las iteraciones son (sustituyendo):

iteración	0	1	2	3
x	1	0.875	0.75	0.995
y	-1	-1	-1.667	-1.693
z	1	2	2.04	2.08

(c) Determina el residuo usando como solución aproximada la tercera iteración obtenida.

Solución: Si llamamos a la solución aproximada $\bar{x} = (0.995, -1.693, 2.08)$ el residuo es $A\bar{x}-b$, en este caso

$$residuo = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.995 \\ -1.693 \\ 2.08 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.039 \\ 0.081 \\ 0.235 \end{pmatrix}$$

3. (a) Usando interpolación de tipo Taylor, escribe el polinomio $p(x) = x^5$ como suma de potencia de $(x-2)$, es decir,

$$x^5 = a_0 + a_1(x-2) + a_2(x-2)^2 + a_3(x-2)^3 + a_4(x-2)^4 + a_5(x-2)^5.$$

Solución: Como sabemos, el polinomio de interpolación con datos tipo Taylor coincide con el polinomio de Taylor de la función dada, pero además, por la unicidad del polinomio interpolador, si partimos de un polinomio de grado 5 e interpolamos hasta su quinta derivada (6 datos) en $x_0 = 2$, obtendremos el mismo polinomio, y de ahí la igualdad. Por todo ello, los a_k son los coeficientes del polinomio de Taylor de x^5 en $x_0 = 2$, es decir $a_k = p^{k)}(2)/k!$, y pasamos a calcularlos

$$\begin{array}{rcll}
p(x) = x^5 & \Rightarrow & p(2) = 2^5 = 32 & \Rightarrow\ a_0 = 32 \\
p'(x) = 5x^4 & \Rightarrow & p'(2) = 5 \times 2^4 = 80 & \Rightarrow\ a_1 = 80 \\
p''(x) = 20x^3 & \Rightarrow & p''(2) = 20 \times 2^3 = 160 & \Rightarrow\ a_2 = 160/2! = 80 \\
p'''(x) = 60x^2 & \Rightarrow & p'''(2) = 60 \times 2^2 = 240 & \Rightarrow\ a_3 = 240/3! = 40 \\
p^{4)}(x) = 120x & \Rightarrow & p^{4)}(2) = 120 \times 2 = 240 & \Rightarrow\ a_4 = 240/4! = 10 \\
p^{5)}(x) = 120 & \Rightarrow & p^{5)}(2) = 120 & \Rightarrow\ a_2 = 120/5! = 1
\end{array}$$

y por lo tanto

$$x^5 = 32 + 80(x-2) + 80(x-2)^2 + 40(x-2)^3 + 10(x-2)^4 + (x-2)^5.$$

(b) Siguiendo un procedimiento análogo, demuestra que

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-1)^k.$$

Notas: El número combinatorio $\binom{n}{k}$ se define como $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.
El factorial de 0 es $0! = 1$ por definición.

Solución: Repetimos el mismo argumento pero tomando $p(x) = x^n$ e interpolando hasta su n–ésima derivada en el punto $x_0 = 1$ para obtener la igualdad análoga:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{k)}(1)}{k!} (x-1)^k,$$

de manera que basta con verificar que los coeficientes de ambas expresiones son iguales:

$$\frac{p^{k)}(1)}{k!} = \binom{n}{k},$$

o, desarrollando el número combinatorio, basta ver que:

$$p^{k)}(1) = k!\binom{n}{k} = \frac{k!\,n!}{k!\,(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1),$$

(ojo con $k = 0$ que sale $0!\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!} = 1$). Veámos estas igualdades una a una:

$$\begin{array}{rcl}
p(x) = x^n & \Rightarrow & p(1) = 1 \\
p'(x) = nx^{n-1} & \Rightarrow & p'(1) = n \\
p''(x) = n(n-1)x^{n-2} & \Rightarrow & p''(1) = n(n-1) \\
p'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3} & \Rightarrow & p'''(1) = n(n-1)(n-2) \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

y así sucesivamente. Como en cada derivación se añade el siguiente exponente que es una unidad menor, en el paso k–ésimo tendremos $p^{k)}(1) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ como queríamos demostrar.