Universidad de Granada
Facultad de Ciencias
Dept. Matemática Aplicada

MÉTODOS NUMÉRICOS
Grupo B
Licenciatura en Matemáticas

1ª prueba de evaluación continua

12-dic-06

Resolución numérica de ecuaciones escalares y sistemas de ecuaciones lineales

Apellidos y Nombre	**Firma**
D.N.I.:	

1. Los materiales radiactivos disminuyen su masa con el paso del tiempo debido a la emisión de partículas de sus núcleos. La función que determina su masa en kilogramos en el instante t de tiempo (medido en años) es:

$$masa(t) = M_0 \frac{1 + k\,e^{-t/k}}{1+k}$$

siendo M_0 su masa inicial en kilogramos (para $t = 0$) y k una constante que depende de la capacidad radiactiva del material.

En Londres hace diez años guardaron un kilogramo de polonio y hoy, diez años después, su masa ha disminuido en un 20 por ciento; con estos datos trataremos de estimar la constante k del polonio.

(a) Plantea cuál es la ecuación que ha de verificar la constante k buscada.

(b) Calcula la función g_{NR} de Newton–Raphson cuyo punto fijo es k.

(c) Realiza dos iteraciones del método de Newton–Raphson partiendo de $k_0 = 43$; considera que la segunda iteración obtenida k_2 es una buena aproximación de la constante k buscada.

(d) Usando k_2 como constante para el polonio en la función anterior, estima la masa de polonio que quedará dentro de 5 años.

Puntuación:

1. (a), (b), (c): 2 puntos.

1. (d): 1 punto.

2. Una óptica va a hacer un pedido de gafas que piensa distribuir en un expositor de 60 unidades con diseños de tres firmas de moda: Agustín–Aflelou, Faustino–Fassion y un tercero que ha entrado con fuerza en el mercado, Vicente–Vogue. Según las tendencias actuales, la óptica pretende colocar 3 gafas de Agustín–Aflelou por cada una de Faustino–Fassion y completar el resto con diseños de Vicente–Vogue, que aún no sabe bien cómo se va a vender. El presupuesto total de la óptica para este menester es de 1.600 EUR y los precios de las gafas son los siguientes: 30 EUR por unas gafas de Agustín–Aflelou, 25 EUR por unas de Vicente–Vogue y 20 EUR por las de Faustino–Fassion.

   (a) Teniendo en cuenta estos datos y llamando "x" al número de gafas de Agustín–Aflelou que irán al expositor, "y" al número de gafas de Vicente–Vogue y "z" al número de gafas de Faustino–Fassion, determina el sistema lineal que han de verificar estas incógnitas.

   (b) Por el método de Gauss, obtén un sistema equivalente triangular superior, indicando en los dos pasos realizados la matriz de Frobenius asociada a la reducción por filas.

   (c) Resuelve el sistema e indícale a la óptica la distribución de gafas que debe poner en su expositor.

Puntuación:

2.: 1 punto cada apartado.

Soluciones.

1. (a) Como nos dice que $masa(10) = 0.8$ Kg, escribiendo esta igualdad usando la expresión de $masa(t)$ y poniendo $M_0 = 1$ Kg, obtenemos (y simplificamos)

$$\frac{1+ke^{-10/k}}{1+k} = 0.8 \quad \Leftrightarrow \quad 1+ke^{-10/k} = \frac{4}{5}(1+k) \quad \Leftrightarrow \quad 5ke^{-10/k}+1-4k = 0,$$

valiendo cualquiera de ellas como ecuación para k. Elegimos la última por ser la más simple: $f(k) = 5ke^{-10/k}+1-4k = 0$.

1. (b) Basta calcular $g_{NR}(k) = k - f(k)/f'(k)$, en este caso:

$$g_{NR}(k) = k - \frac{5ke^{-10/k}+1-4k}{5e^{-10/k}+50e^{-10/k}/k-4} = \frac{k(e^{10/k}-50)}{k(4e^{10/k}-5)-50}$$

1. (c) Hacemos dos iteraciones...

$$k_0 = 43. \quad \Rightarrow \quad k_1 = g_{NR}(43) = 43.69195 \quad \Rightarrow \quad k_2 = g_{NR}(43.69195) = 43.69063$$

1. (d) Basta con sustituir la función masa en $t = 15$ usando k_2 como aproximación de k

$$masa(15) = \frac{1+ke^{-15/k}}{1+k} \approx \frac{1+\,e^{-15/43.69063}}{1+43.69063} = 0.716\,Kg = 716\,gramos$$

2. (a) Como:

$x = n^o$ gafas de Agustín–Aflelou, a 30 EUR unidad

$y = n^o$ gafas de Vicente–Vogue, a 25 EUR unidad

$z = n^o$ gafas de Faustino–Fassion, a 20 EUR unidad

De los datos deducimos las ecuaciones:

- por cada una de F–F se ponen 3 de A–A $\Rightarrow x = 3z$, $\quad x \quad -3z = 0.$
- en total son 60 gafas $\Rightarrow x+y+z = 60$, $\quad x+y+z = 60,$
- se gasta 1600 EUR $\Rightarrow 30x+25y+20z = 1600$, $\quad 6x+5y+4z = 320,$

2. (b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 60 \\ 6 & 5 & 4 & 320 \end{array}\right) \underset{\sim}{\overset{f_2\to f_2-f_1}{f_3\to f_3-6f_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 60 \\ 0 & 5 & 22 & 320 \end{array}\right) \underset{\sim}{f_3\to f_3-5f_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 60 \\ 0 & 0 & 2 & 20 \end{array}\right)$$

con matrices de Frobenius:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. (c) $x = 30$, $y = 20$, $z = 10$, es decir, 30 gafas de A–A, 20 gafas de V–V y 10 de F–F.