MÉTODOS NUMÉRICOS. Curso 05-06

Interpolación (Polinómica)

1. Estudia el siguiente problema de interpolación consistente en buscar un polinomio $p \in \mathbb{P}_2[x]$ que cumpla:

$$p(x_0) = y_0, \qquad p(x_1) = y_1, \qquad p'(x_2) = y_2.$$

Escribe la fórmula de Lagrange para el caso: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

2. Discute si los siguientes problemas de interpolación son unisolventes en $\mathbb{P}_3[x]$:
a) $p(x_i) = y_i$, $p''(x_i) = y_i''$, $i = 1,2$.
b) $p(0) = a$, $p(1) = b$, $p'(1) = c$, $p''(2) = d$.
c) $p(0) = a$, $p'(0) = b$, $p'(2) = c$, $p''(1) = d$.

3. Estudia la existencia y unicidad de solución de cada problemas de interpolación:

a) Buscar $p \in V := \{q \in \mathbb{P}_3[x] : q'(0) = 0\}$ conocidos: $p(0)$, $p(1)$ y $\displaystyle\int_0^1 p(x)\,dx$.

b) Buscar $p \in \mathbb{P}_2[x]$ conocidos: $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$ y $\displaystyle\int_0^2 p(x)\,dx$.

c) Buscar $p \in V := \{q \in \mathbb{P}_3[x] : q''(0) = 0\}$ conocidos: $p(x_1)$, $p'(x_2)$ y $p''(x_3)$.

d) Buscar $p \in \mathbb{P}_2[x]$ conocidos: $p(x_1)$, $p'(x_2)$ y $p''(x_3)$.

4. Se trata de estudiar la existencia y unicidad de una función $p(x)$ del espacio V generado por las funciones $\{g_0(x), g_1(x), \ldots, g_n(x)\}$ que interpole a una función dada $f(x)$ dada en los nodos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, es decir, que cumpla:

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0,1,\ldots,n, \quad \text{con } f \text{ dada y } x_i \in [a,b] \text{ distintos.}$$

a) Demuestra que si ninguna combinación lineal $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i g_i(x)$ de los $g_i(x)$ se anula en más de n puntos del intervalo $[a,b]$ (salvo en el caso trivial en que todos los λ_i sean cero), entonces el problema anterior es unisolvente.
b) Relaciona este hecho con el caso particular de $V = \mathbb{P}_n[x]$.
c) Basándote en el resultado anterior, comprueba que la interpolación mediante combinaciones de las funciones $\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x), \operatorname{sen}(2x), \cos(2x), \ldots, \operatorname{sen}(nx), \cos(nx)\}$ en $2n+1$ puntos del intervalo $]-\pi, \pi]$ tiene solución única.

5. Calcula mediante la fórmula de Lagrange una cúbica que pase por los puntos $(-1,2)$, $(0,3)$, $(1,2)$ y $(2,0)$. Repite el cálculo pero usando la fórmula de Newton.

6. Consideramos el problema de interpolación siguiente:

$$\boxed{\text{Buscar } p \in V := \{q \in \mathbb{P}_3[x] : q''(1) = 0\} \text{ tal que: } \begin{cases} p(x_1) = y_1, \\ p(x_2) = y_2 \\ p(x_3) = y_3. \end{cases}}$$

a) Da una base cualquiera de V y estudia la unisolvencia para $x_i = i$.
b) Halla la base de Lagrange asociada a los nodos del apartado anterior.
c) Caracteriza los $\{x_1, x_2, x_3\}$ para los que no haya existencia o unicidad.

7. Calcula las bases de Lagrange y de Newton asociadas a los siguientes problemas de interpolación:

a)

x	-2	0	1
$f(x)$	0	1	1

b)

x	1	2	0	3
$f(x)$	3	2	-4	5

c)

x	3	7	1	2
$f(x)$	10	146	2	1

d) Resuélvelos.

8. La ecuación $x-9^{-x}=0$ tiene una solución en $[0,1]$ (aplíquese Bolzano). Halla el polinomio que interpola a $f(x)=x-9^{-x}$ en los nodos 0, 0,5 y 1. Iguala a cero el polinomio obtenido y resuelve dicha ecuación; observa que la solución calculada se puede considerar como una aproximación de la solución de la ecuación original ($x=0{,}408004406...$).

9. a) Construye la tabla de diferencias divididas de la función $f(x)=x^3$ en los puntos $\{0,1,3,4\}$ y, a partir de ellas, escribe el polinomio de interpolación.

b) Demuestra que si $f(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a n, entonces $f[x_0,x]$ es un polinomio de grado menor o igual a $(n-1)$.

10. Calcula la tabla de diferencias divididas con argumentos repetidos y el polinomio de interpolación en $\mathbb{P}_4[x]$ para los datos:

x	0	1	2
$f(x)$	2	-4	44
$f'(x)$	-9	4	

11. (Control feb 05) Justifica **razonadamente** la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

1. Los polinomios $p_1(x)=1-x^2$ y $p_2(x)=(x-1)^2$ (distintos pero del mismo grado) interpolan a la función $f(x)=e^x(1-x)$ en los nodos $x=0$ y $x=1$.
2. Dados n nodos $\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ cualesquiera y distintos y n valores $\{y_0,y_1,\ldots,y_n\}$ cualesquiera (siendo n un número natural arbitrario), existe una única función de la forma

$$f(x)=e^{a_0x}+e^{a_1x}+\ldots+e^{a_nx},\ \text{ con } a_i\in\mathbb{R},$$

que verifica $f(x_i)=y_i$ para cada $i=0,1,...,n$.

3. La siguiente tabla de diferencias divididas con argumentos repetidos (incompleta) corresponde al polinomio de interpolación $p(x)=x^4-x-1$:

x_i	y_i					
0	-1		1			0
0		0				
1				1		
1				0		
-1	1		2			
-1	1	-5				

4. Si $f(x)=2x^4-1$, entonces $f[-2,-1,0,1,2]=0$.
5. Si en el problema de interpolación de Lagrange todos los valores son positivos, entonces el polinomio de interpolación también es positivo (es decir, $p(x)\geq 0$ para cualquier x).
6. Si $f(x)\in\mathbb{P}_2[x]$, entonces, $f[a,x]\in\mathbb{P}_1[x]$ para cualquier valor de a.

12. (Control feb-05) Una empresa de control de calidad está estudiando la cantidad en agua de un cierto mineral y han realizado las siguientes mediciones:

Hectolitros de agua	1	1.5	2	2.5
Cantidad de mineral en miligramos	32	41	48	53

Estima cuántos miligramos de mineral podrán encontrarse en 1.6 hectolitros de agua; para ello haz la tabla de diferencias divididas asociada a estos datos y calcula el polinomio de interpolación mediante la fórmula de Newton.

Navegando por internet descubren que otra empresa hizo un estudio similar, encontrando 59 miligramos del mineral en 3 hectolitros de agua. Calcula el nuevo polinomio de interpolación.

13. (Examen jul-05) Este ejercicio consiste en probar la fórmula

$$1+2+3+\ldots+n \;=\; \frac{n(n+1)}{2}, \quad \text{para todo } n \text{ natural.}$$

Para ello vamos a interpolar una función $f(x)$ que, sobre cada natural, toma el valor:

$$f(n) = 1+2+3+\ldots+n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Usa la tabla de diferencias divididas para justificar que el polinomio que interpola a f en 1,2,3,...,n es de grado 2.

(ii) Usando la fórmula de Newton, demuestra que $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

14. (Examen sep-05) Se considera el polinomio: $p(x) = x^4 + 2x^2 - 7x - 2$. Construye el polinomio (del grado adecuado para que el problema de interpolación sea unisolvente) que interpola a $p(x)$ en todas sus raíces reales.