

MÉTODOS NUMÉRICOS. Curso 05-06

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

- Comprueba que A admite descomposición LU y calcula una.
- Comprueba que B no admite descomposición LU .
- Da una permutación de las filas de B que admita descomposición LU y calcúlala.
- Calcula $k(A)$ y $k(B)$ con las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$

2. Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, aunque sea simétrica, no admite descomposición de Cholesky. ¿Será definida positiva? Calcula $x^t \cdot A \cdot x$ para el vector $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. Determina razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- La inversa de una matriz simétrica regular es simétrica regular.
- La suma de matrices definidas positivas es una matriz definida positiva.
- Si A admite una descomposición LU entonces es regular.
- Toda matriz ortogonal admite una descomposición LU
- De 2 matrices A y B sabemos que $A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y que $A - B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Entonces $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Mediante la descomposición QU de Householder resuelve el S.E.L.:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1, \\ 2x + y + z = 0, \\ x + y + z = 4. \end{cases}$$

5. Utilizando la descomposición LU de Doolittle, resuelve $A \cdot x = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \text{ y } b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 81 & 9 & 0 \\ 9 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

- Descomponla, si es posible, por el método de Cholesky.
- Si x es un vector no nulo de \mathbb{R}^n ¿qué puedes decir del producto $x^t \cdot A \cdot x$?
- Calcula las dos primeras iteraciones del método de relajación con $w = 1$ para aproximar la solución del sistema $A \cdot x = (2, 2, 2)^t$ tomando como aproximación inicial $x^{(0)} = (1, 1, 1)^t$.
- Justifica si dicho método converge.

7. Dados x e y en \mathbb{R}^n y $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ regular, Comprueba que la matriz $A + x \cdot y^t$ es regular si y sólo si $(1 + y^t \cdot A^{-1} \cdot x) \neq 0$, y que, en este caso

$$(A + x \cdot y^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{(A^{-1} \cdot x) \cdot (y^t \cdot A^{-1})}{1 + y^t \cdot A^{-1} \cdot x}$$

8. Halla un valor aproximado de la solución del sistema:

$$\begin{cases} 9x - 2y & = 5, \\ -2x + 4y - z & = 1, \\ -y + z & = -5/6, \end{cases}$$

aplicando 5 veces el método de Jacobi, el método de Gauß-Seidel y el método de relajación con $w = 1, 2$; toma en los tres casos $x^{(0)} = y^{(0)} = z^{(0)} = 0$ y usa sólo 4 cifras decimales.

Sabiendo que la solución exacta es $x = 2/3$, $y = 1/2$ y $z = -1/3$ interpreta los resultados.

9. Consideramos el sistema:

$$\begin{cases} 8x + y + z = 26, \\ x + 5y - z = 7, \\ x - y + 5z = 7. \end{cases}$$

- Calcula la solución exacta mediante el método de Gauß.
- Calcula la solución exacta usando una descomposición LU .
- Aproxima la solución usando el método de Gauß-Seidel operando con 3 decimales y partiendo de $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.
- Justifica si el método de Jacobi converge.

10. Consideramos el siguiente sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & -5 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Si intentamos aplicar el método de Jacobi nos encontramos con que $\rho(B_J) = 3,4827$, ¿habrá convergencia? Encuentra una forma de poder aplicar el método de Jacobi de manera que sea convergente y aproxima la solución partiendo de $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.

11. (Control ene-05) Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) Dada una matriz A ortogonal, el sistema $Ax = Bx - b$ tiene solución cuando B es también ortogonal.

b) Al calcular una solución aproximada x_0 del sistema $\frac{1}{100}Ax = b$ se tienen los siguientes datos: el condicionamiento de A es $K(A) = 10^6$, la norma de b es 100 y el residuo $\|\frac{1}{100}Ax_0 - b\|$ es 1. Entonces el error relativo cometido está entre 10^{-8} y 10^4 .

c) Si una matriz $A \in \mathcal{M}_{8 \times 8}$ tridiagonal cumple que $a_{i,j} = 0$ cuando $i - j = 0$, entonces o es la matriz cero o es antisimétrica.

d) Todas las matrices simétricas, si son regulares, admiten descomposición LU .

e) Si A es estrictamente diagonal dominante entonces para resolver $Ax = b$ los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen pero no Relajación para ningún $\omega > 0$.

f) Para el sistema $Ax = b$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ el método de Jacobi converge y la

matriz B_J asociada al método $x^{(n+1)} = B_J x^{(n)} + c_J$ es $B_J = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

12. (Control ene-05) Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método de factorización de Doolittle.

¿Se podría aplicar el método de Choleski? ¿Y el de Householder? Justifica tus respuestas.

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 8 & 4 & -14 \\ 4 & 7 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

13. (Examen jul-05) Dado el S.E.L.

$$\begin{cases} 3x - 3y - z + 8t = 1 \\ x + 4y + t = 5 \\ 4x + y - z = 6 \\ x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

- Comprueba que no se puede aplicar directamente el método de Gauss-Seidel.
- Reordena las ecuaciones para garantizar que el método de Gauss-Seidel es aplicable y converge.
- Sabiendo que la solución exacta es $x = 1$, $y = 1$, $z = -1$ y $t = 0$, aplica el método de Gauss-Seidel al sistema reordenado hasta que el error cometido en cada variable sea inferior a $1/10$.

14. (Control ene-05) Consideramos el S.E.L. $Ax = b$, del que se conoce una descomposición LU como la que sigue

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & a_{1,3} \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & a_{3,2} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{2,1} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & \frac{8}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & u_{3,3} \end{pmatrix} = LU.$$

- Deduce los valores omitidos en cada matriz.
- Usa esa descomposición para calcular la solución exacta del sistema $Ax = b$.
- Escribe las ecuaciones del método iterativo de Gauss-Seidel y calcula 2 iteraciones a partir de la iteración inicial $x^{(0)} = (0, 0, 0)^t$.
- ¿Crees que el método dará buenos resultados? ¿por qué?

15. (Control ene-05) Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- Si la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ es definida positiva, entonces es regular y $\alpha = 2$
- Si A y B son matrices tales que $AB = BA$, entonces bien una de ellas es invertible bien ambas son simétricas.
- Toda matriz que se descomponga en la forma $A = LL^t$ (con L triangular inferior) es definida positiva.

- Cierto método iterativo tiene por matriz asociada $B = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & -1/3 \\ -1/2 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$, por lo que no converge dado que $\|B\|_1 = 1$.