MÉTODOS NUMÉRICOS. Curso 05-06

Resolución de ecuaciones II

1.- En 1225 Leonardo de Pisa estudió la ecuación

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0 \tag{1}$$

y obtuvo la raíz $x = 1{,}368808107$. No se sabe cómo encontró este valor, pero es un resultado notable para su época. En este ejercicio se pretende resolver la ecuación (1) usando varios métodos.

(a) Transforma (1) en una ecuación equivalente $x = g(x)$, dando dos posibles elecciones de $g(x)$, de forma que el método de iteración funcional

$$x_{n+1} = g(x_n)\,, \quad n \geq 0\,,$$

sea convergente en un caso y divergente en el otro.

(b) Usando el método convergente del apartado anterior, aproxima la raíz de (1) con precisión de 10^{-3}.

(c) Aplica a la ecuación (1) el método de Steffensen a partir de (b).

(d) Estudia la aplicabilidad del teorema de convergencia global del método de Newton–Raphson a (1) y calcula mediante dicho método el valor de la raíz. Compara el resultado obtenido con (b) y coméntalo.

(e) Aplica cinco iteraciones (hasta x_6) del método de la secante a (1) y compara el resultado con (b) y (d).

(f) Construye una sucesión de Sturm asociada a $p(x)$, localiza las raíces reales de (1) en intervalos disjuntos de amplitud uno y acota las raíces complejas si las hay.

2.- Consideramos el polinomio $p(x) = x^3 + 5x - 4$. Se pide

(a) Mediante la teoría de Sturm, comprueba que $p(x)$ tiene una única raíz real y localízala en un intervalo de amplitud unidad.

(b) Demuestra que r es la raíz de $p(x)$ si y sólo si r es un punto fijo de la función

$$g(x) = \frac{4}{x^2 + 5} \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

(c) Prueba que el método iterativo asociado a la función g es convergente en el intervalo $[0,1]$ y deduce el orden de convergencia de dicho método.

(d) Calcula una aproximación de r con dos decimales exactos usando el método de (c) y el de Newton–Raphson (tomar $x_0 = 0$). Compara los resultados.

3.- Separa las raíces reales de las ecuaciones

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0, \qquad 2x^3 + x^2 - 5x - 3 = 0 \text{ (Control nov-04)}$$

en intervalos de amplitud unidad mediante la teoría de Sturm.

4.- Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(a) Sea $f(x)$ una función. Entonces, si $f(a)f(b) < 0$, por el teorema de Bolzano, existe al menos una raiz en el intervalo $[a,b]$.

(b) Si $g'(x) < 1$, $\forall x \in [a,b]$, entonces el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$, $x_0 \in [a,b]$, converge.

(c) ¿Existe una función $g(x)$ tal que los primeros términos de la sucesión $\{x_n\}$, generada por el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ sean $\{1, 1{,}5, 2, 1{,}5, 1, 0, 3, \ldots\}$?

(d) Si un polinomio tiene todos sus coeficientes positivos, entonces no puede tener raices reales negativas.

(e) Si un polinomio de grado 7 tiene todas sus raices reales y simples entonces la sucesión de Sturm asociada al polinomio tiene 8 funciones.

(f) Sea $\{f_0, f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ una sucesión de Sturm. Entonces, si tomamos m números positivos $\{a_i > 0, i = 0, \ldots, m\}$, la sucesión $\{a_0 f_0, a_1 f_1, a_2 f_2, \ldots, a_m f_m\}$ también es de Sturm.

(g) Si en la construcción de la sucesión de Sturm asociada a un polinomio $p(x)$ de grado $2n$ ocurre que el último resto no nulo obtenido $-f_m(x)$ es un polinomio de grado n con todas sus raices simples, entonces todas las raices de $p(x)$ son raices de $f_m(x)$.

5.- Demuestra que el método de Steffensen aplicado a la sucesión $x_{n+1} = x_n + f(x_n)$ para resolver la ecuación $f(x) = 0$, conduce al método

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(f(x_n))^2}{f(x + f(x)) - f(x)}.$$

6.- (Control nov-04) Considera la ecuación polinómica $x^3 - 3x + 1 = 0$ y responde, razonadamente, las cuestiones siguientes:

(a) ¿qué intervalo contiene todas las raíces reales?

(b) Calcula una sucesión de Sturm para la ecuación tomando $f_0 = x^3 - 3x + 1$, $f_1 = x^2 - 1$.

(c) ¿cuántas raíces reales tiene la ecuación?, sepáralas en intervalos de amplitud unidad.

(d) Si aplicamos el método $x_n = -\frac{1}{x_{n-1}^2 - 3}$ con x_0 adecuada, ¿para qué raíz será más apropiado?

(e) Hecha la elección en (d), calcula 3 iteraciones con el método dado.

7.- (Examen sept-04) Se considera el siguiente polinomio: $p(x) = x^4 + 2x^2 - 7x - 2$.

(a) Separa todas las raíces reales de la derivada de $p(x)$ en intervalos de longitud uno mediante una sucesión de Sturm.

(b) Demuestra que para cualquier aproximación inicial x_0 en el intervalo $[1,8]$ el método de Newton–Raphson para resolver $p(x) = 0$ converge.

(c) Aproxima la raíz positiva de $p(x)$ usando el método de Newton-Raphson a partir de la aproximación inicial $x_0 = 2$ deteniendo el proceso cuando la distancia entre dos iteraciones sucesivas sea menor que 10^{-4}.