MÉTODOS NUMÉRICOS. Curso 05-06

Resolución de ecuaciones I

1.- Utiliza el método de bisección para calcular con una precisión de 10^{-2} las soluciones de $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ en los intervalos $[0,1]$, $[1, 3{,}2]$ y $[3{,}2, 4]$.

2.- Utiliza el método de bisección para aproximar $\sqrt{3}$ con un error absoluto máximo de 10^{-4}. (Ayuda: considera $f(x) = x^2 - 3$).

3.- Halla una cota del número de iteraciones del método de bisección necesarias para aproximar la solución de $x^3 + x - 4 = 0$ que está en el intervalo $[1, 4]$ con 3 cifras decimales exactas y calcula dicha aproximación.

4.- La función $f(x) = \text{sen }(\pi x)$ sabemos que tiene ceros en cada número entero. Prueba que cuando $-1 < a < 0$ y $2 < b < 3$ el método de bisección sobre $[a, b]$ converge a:
a) 0, si $a + b < 2$,
b) 2, si $a + b > 2$,
c) 1, si $a + b = 2$.

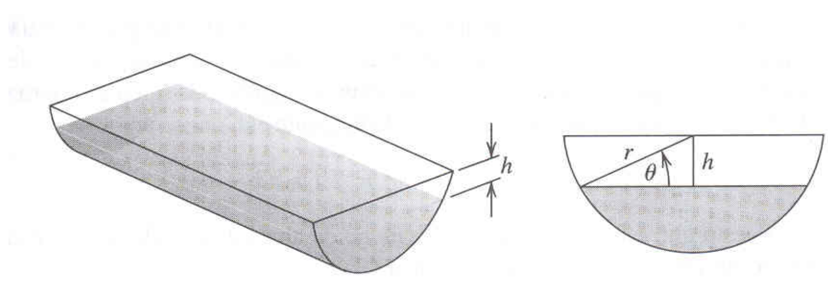
5.- Dada $f(x) = -x^3 - \cos(x)$ y dados $x_0 = -1$ y $x_1 = 0$, calcula tres aproximaciones sucesivas de la raiz de f en $[-1, 0]$ usando tanto el método de la secante como el de *regula falsi*.

6.- Aproxima, con un error inferior a 10^{-4}, el valor de x para el cual se obtiene el punto de la gráfica de $y = x^2$ que está más cerca del punto $(1,0)$. (Ayuda: minimiza la función $d(x)^2$ tomando $d(x)$ la distancia de cada punto (x, x^2) de la gráfica al punto $(1,0)$.

7.- El perfil de un abrevadero de longitud L es un semicírculo de radio r (ver figura). Cuando está lleno hasta una distancia h del borde superior el volumen V de agua que contiene viene dado por

$$V = L\left(\frac{\pi r^2}{2} - r^2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{r}\right) - h\sqrt{r^2 - h^2}\right)$$

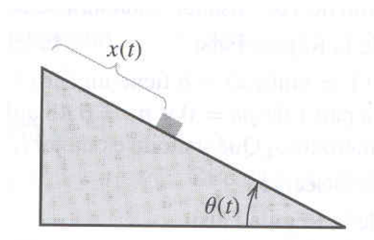
Si $L = 10m$, $r = 1m$ y $V = 12{,}4m^3$ determina la profundidad de agua que hay en el abrevadero con un error máximo de $1cm$.



8.- Una partícula parte del reposo y de desliza por un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación θ cambia con respecto al tiempo t con velocidad constante ω, es decir $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$.
Sabemos que después de t segundos la partícula ha recorrido una distancia $x = x(t)$ dada por

$$x(t) = \frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \text{sen }(\omega t)\right)$$

donde g es la fuerza de la gravedad que suponemos constante e igual a $9{,}8m/s^2$. Si la partícula recorre $1{,}7m$ en 1 segundo, determina con una precisión de 10^{-5} la velocidad ω.



9.- Usa el método de Newton-Raphson para hallar las soluciones de los siguientes problemas con una precisión de 10^{-4}.

a) $x^3-2x^2-5=0$, en $[1,4]$,
b) $x^3+3x^2-1=0$, en $[-3,-2]$,
c) $x-\cos(x)=0$, en $[0,\frac{\pi}{2}]$,
d) $x-0{,}8-0{,}2\text{sen }(x)=0$, en $[0,\frac{\pi}{2}]$.

10.- El capital A acumulado en una cuenta de ahorro en la que se ingresa periódicamente una cantidad P viene dado por la fórmula $A=\dfrac{P}{i}\big((1+i)^n-1\big)$, donde i es el interés en cada periodo y n el número de periodos transcurridos.

Un empresario desearía jubilarse dentro de 20 años con un capital acumulado de 750,000 Eur haciendo depósitos mensuales de 1,500 Eur, ¿cuál es el interés mínimo que debe tener la cuenta de ahorro en la que invierta sus ahorros?

11.- ¿Qué condiciones ha de cumplir el parámetro α para garantizar la convergencia lineal del método iterativo $x_{n+1}=x_n-\alpha f(x_n)$ hacia un cero de $f(x)$ con x_0 apropiado?.

12.- Se desea obtener un método iterativo con convergencia local, al menos cúbica, para aproximar $\sqrt{k}$ con $k>0$.

(a) Probar que los siguientes métodos de iteración de punto fijo (con x_0 apropiado)

(i) $x_{n+1}=g_1(x_n)=\frac{x_n^2+k}{2x_n}$

(ii) $x_{n+1}=g_2(x_n)=\frac{x(3k-x^2)}{2k}$

tienen orden de convergencia local 2.

(b) ¿Existen constantes α y β para las que el método

$$x_{n+1}=\alpha g_1(x_n)+\beta g_2(x_n)\,,\quad n\geq 0\,,$$

tenga orden de convergencia local 3? ¿Es útil el método obtenido?.

(c) Aplicar los resultados anteriores para calcular $\sqrt{7}$ con precisión de 10^{-3}.

13.- Se desean calcular por iteración las raíces positivas de la ecuación $x+\log(x)=0$. Para ello, se proponen los métodos siguientes:

$$(i)\ x_{n+1}=-\log(x_n),\quad (ii)\ x_{n+1}=e^{-x_n},\quad (iii)\ x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+e^{-x_n})$$

(a) ¿Hay alguno de ellos cuyo uso no sea aconsejable?

(b) ¿Cuál es el más adecuado de los tres?

(c) Proporcionar alguna otra fórmula mejor que las anteriores.

14.- Para encontrar la raíz cuadrada positiva de $a > 0$ se utiliza el método de Newton–Raphson aplicado a $f(x) = x^2 - a$. Suponiendo que $x_0 > 0$ y $x_0 \neq \sqrt{a}$, deducir los siguientes resultados:

(a) $x_{n+1} > \sqrt{a} \;\; \forall n \geq 1$.

(b) $x_n > x_{n+1} \;\; \forall n \geq 1$.

(c) Si el error absoluto es $e_n = x_n - \sqrt{a}$, entonces $e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2x_n} \;\; \forall n \geq 0$.

(d) Si el error relativo $E_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{\sqrt{a}}$, entonces $E_{n+1} = \frac{\sqrt{a}}{2x_n} E_n^2 \;\; \forall n \geq 0$.

(e) Si $x_0 > \sqrt{a}$ y $|E_0| \leq 0{,}1$, proporcionar una cota de $|E_4|$.

15.- Para calcular $\sqrt{3}$ se propone el método

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3 + \alpha}{\beta x_n^2 - 3}.$$

(a) Encontrar α y β para que la convergencia local sea al menos cuadrática. ¿Hay convergencia cúbica en este caso?

(b) Se considera el método de Newton–Raphson para $f(x) = x^2 - 3$. ¿Convergerá más rápidamente que el método anterior?

(c) Tomando $x_0 = 2$ y operando con seis cifras decimales, calcular $\sqrt{3}$ con cuatro cifras decimales exactas aplicando los dos métodos anteriores. Comparar con lo observado en (b).

(d) Si aplicamos el método de bisección a la ecuación $x^2 - 3 = 0$ en $[1, 2]$, ¿cuántas iteraciones serán necesarias para alcanzar la misma precisión que en el apartado (c)?

16.- Se tiene que construir una lata de forma cilíndrica con capacidad de 1 litro. Las tapas circulares de la lata se hacen con un radio superior en 0.25 cm al radio real de la lata (para poder sellar la lata). Igualmente, el material para la parte lateral de la lata debe ser 0.25 cm más largo que la circunferencia de la lata. Calcule el radio óptimo de la lata que precisa un material mínimo para su construcción con precisión de 10^{-4}

17.- Responde, razonadamente, a las cuestiones siguientes:

(a) Si aplicamos el método de Newton-Raphson a

$$x^3 + 2x - 1 = 0$$

en el intervalo $[0, 2]$ con una aprox. inicial x_0 adecuada convergerá a la raíz. ¿Por qué?

(b) Si usamos la función de iteración $g(x) = \sqrt{1/x+3}$,

(i) ¿qué ecuación pretende resolver y en qué intervalo?

(ii) ¿convergerá? En caso afirmativo, ¿cuál es su orden?

(c) ¿Cuál es la característica esencial que distingue los métodos de la Secante y *Regula-Falsi*?

(d) ¿Cuántas bisecciones tendremos que realizar para asegurar que la aproximación de la raíz de $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{x}{3}$ en $[1,2]$ tenga error absoluto menor que 0.025? ¿y si queremos resolver la ecuación: $x^3+2x-1=0$ en el intervalo $[0,2]$?

18.- Considera la ecuación $e^x - 2x - 5 = 0$.

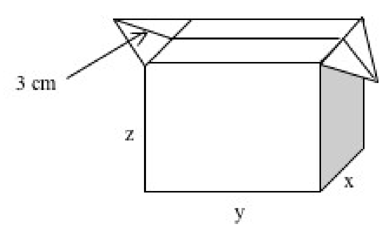
(a) Prueba que tiene una única raíz real en $[2,3]$.

(b) Proporciona tres métodos de iteración de punto fijo con las características siguientes:

- Uno sea no convergente;
- Los otros sean convergentes indicando su velocidad de convergencia;

(c) Estima el valor de la raíz tras 4 iteraciones desde el método más rápido tomando como iteración inicial $x_0 = 3$.

19.- Un fabricante de envases de zumo se dispone a optimizar las dimensiones de sus envases con el objetivo de minimizar el coste de fabricación (proporcional al material usado). Teniendo en cuenta que la capacidad de los envases debe ser de 1.5 litros, calcula las dimensiones óptimas de los mismos (usa los datos de la figura).



Para facilitar la resolución sigue las etapas siguientes:

(a) define la función a optimizar (minimizar en este caso);

(b) busca la(s) relación(es) que hay entre las variables del problema;

(c) úsalas para reducir el número de variables de la función inicial;

(d) escribe el sistema asociado a la búsqueda de extremos de una función de 2 variables.

(e) Para resolver el sistema anterior elimina una de las variables y expresa la ecuación resultante en forma de ecuación polinómica;

(f) estima la solución (será una de las magnitudes del envase) de la ecuación polinómica aplicando 3-veces el método N–R con aproximación inicial 10 cm;

(g) por último, usando el valor obtenido en el apartado anterior, estima el resto de magnitudes del envase.

20.- (Control oct-04) (a) Dadas las siguientes ecuaciones y los siguientes métodos de resolución de punto fijo:

$$
\begin{array}{ll}
a)\ e^x + x = 0, & 1)\ x_{n+1} = e^{x_n/2} \\
b)\ e^x - x^2 = 0, & 2)\ x_{n+1} = (x_n - 1) - \dfrac{x_n - 1}{e^{x_n} + 1} \\
c)\ e^x - 1 = 0, & 3)\ x_{n+1} = \dfrac{x_n e^{x_n} - e^{x_n} - x_n^2}{e^{x_n} - 2x_n} \\
 & 4)\ x_{n+1} = 1 - e^{x_n} + x_n
\end{array}
$$

determina razonadamente qué método o métodos (con x_0 elegido adecuadamente en cada caso para que haya convergencia) resuelve cada ecuación.

(b) Independientemente del apartado anterior, determina si los métodos 2) y 4) son localmente convergentes.

21.- (Examen jul-05) Se considera el método iterativo

$$x_{n+1} = \frac{x_n\,(x_n^2 + \alpha)}{3x_n^2 + 2}\,.$$

(a) Determina α para que $\sqrt{2}$ sea un punto fijo.

(b) Demuestra que, para el α obtenido, el método iterativo posee convergencia local al menos cúbica.

(c) Partiendo de $x_0 = 1$, aplica el método hasta que la diferencia entre dos iteraciones sucesivas no supere 10^{-5}.