Universidad de Granada E.U.A.T.	Control de Álgebra Lineal, 30 de marzo de 2006 Aplicaciones Lineales e Isometrías

1. Justifica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) El núcleo de la aplicación lineal asociada a la siguiente matriz, sea cual sea el valor de a, tiene dimensión 2:

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3a & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Si existiese una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ dada por $f(x) = A\,x$ que verificase que rango$(A) = 3$ y dim(ker(f))$= 5$, entonces $n = 8$ y $m = 3$.

   (c) La matriz $A = \begin{pmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{pmatrix}$ es la matriz respecto de la base canónica de la simetría en $\mathbb{R}^2$ respecto de la recta de ecuación $\{y = 3x\}$.

2. Dada la aplicación lineal siguiente:

   $$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) & \mapsto & (x - y - 2z,\ y - 3z) \end{array}$$

   (a) Calcula $M(f; B, B')$ siendo $B = \{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ y $B' = \{(0, 1), (1, 0)\}$.

   (b) Calcula una base de $\ker(f)$.

3. Calcula, respecto de la base canónica, la matriz de la simetría en $\mathbb{R}^3$ respecto del plano de ecuación $\{x = y\}$.

Soluciones:

1. a) $\boxed{\text{Verdadero}}$. En general sabemos que si una matriz tiene n columnas (la aplicación asociada sale de $\mathbb{R}^n$) se verifica que: **dim(ker(A))**$=$ $n-$**rango(A)**, por ello, basta con estudiar el rango, lo que haremos a través de transformaciones por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 3a & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{2^a-2\times1^a \\ 3^a+1^a}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 1 & 2a & 1 \\ 0 & 1 & 2a & 1 \end{pmatrix} \overset{3^a-2^a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 1 & 2a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde observamos que el rango es 2 independientemente del valor de a, por lo que dim(ker(A))$= 4-$rango(A) también vale 2 independientemente del valor de a.

1. b) $\boxed{\text{Falso}}$. Aunque la primera parte es cierta ya que:

$$n = \dim(\ker(f)) + \text{rango}(A) = 5 + 3 = 8,\ \Rightarrow n = 8.$$

de m sólo podemos afirmar que es mayor o igual a 3 porque,

$$3 = \text{rango}(A) = \dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\mathbb{R}^m) = m,\ \Rightarrow 3 \leq m.$$

Por lo tanto, si tomamos una matriz cualquiera $m \times 8$ con rango 3 pero más de 3 filas $m > 3$ tenemos un contraejemplo.

1. c) $\boxed{\text{Verdadero}}$. Primero verificamos que A corresponde a una isometría, es decir, comprobamos que A es ortogonal:

$$A.A^t = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, como el determinande de A es igual a (-1) sabemos que corresponde a una simetría, por lo que basta comprobar si la recta $\{y = 3x\}$ queda fija, para lo que tomamos un vector de esa recta, $v = (1, 3)$, y aplicamos A:

$$A.v = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = v.$$

2. a) Podemos hacerlo de dos formas (al menos):
forma 1: Directamente. Calculamos las imágenes de los vectores de la base B y los ponemos en coordenadas respecto de B':

$$\begin{aligned} f(0,0,1) = (-2,-3) &= (-3)\times(0,1) + (-2)\times(1,0) \\ f(1,0,0) = (1,0) &= 0 \times (0,1) + 1 \times (1,0) \\ f(0,1,1) = (-3,-2) &= (-2)\times(0,1) + (-3)\times(1,0) \end{aligned}$$

de donde construimos la matriz pedida

$$M(f; B, B') = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

forma 2: Pasando por $M(f; B_c, B_c)$. Fácilmente obtenemos la matriz A de f con respecto a las bases canónicas y las matrices de cambio de base:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C_{B'B_c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{BB_c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y usando la fórmula del cambio de bases para la matriz de una aplicación:

$$\begin{array}{ccccc} & B_c & \xrightarrow{A} & B_c & \\ C_{BB_c} & \uparrow & \bigcap & \uparrow & C_{B'B_c} \\ & B & \xrightarrow{?} & B' & \end{array} \quad \Rightarrow \quad M(f; B, B') = (C_{B'B_c})^{-1}.A.C_{BB_c}$$

obtenemos en nuestro caso:

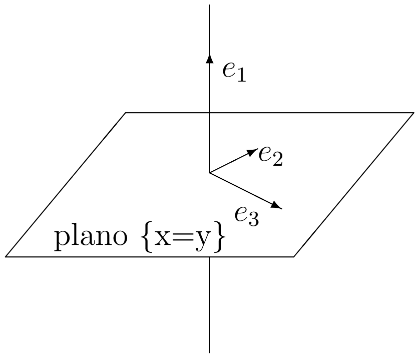
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. b) Lo calculamos directamente de la definición:

$$\ker(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{array}{r} x - y - 2z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{array}\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{array}{r} x = 5\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = \lambda \end{array}, \ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

de donde sacamos la base formada por un sólo vector: $B = \{(5, 3, 1)\}$.

3. Como siempre, primero construimos una base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ de manera que e_1 esté en la recta ortogonal al plano dado y $\{e_2, e_3\}$ formen base de dicho plano:



$B = \{e_1,\, e_2,\, e_3\}$ base de $\mathbb{R}^3$

En este caso, el vector e_1 lo deducimos de la ecuación de plano, ya que $x - y = 0$ es lo mismo que $\langle(1,-1,0),(x,y,z)\rangle = 0$, y obtenemos el vector $e_1 = (1,-1,0)$ ortogonal a todo el plano. Por otro lado, para obtener e_2 y e_3 resolvemos la ecuación:

$$\text{Plano} = \{x - y = 0\} = \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array} \;:\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Podemos pues elegir $e_2 = (1,1,0)$ y $e_3 = (0,0,1)$. Damos ahora la matriz de la simetría respecto de esta base y la matriz P de cambio de base:

$$A = M(sim; B, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = C_{BB_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando, como siempre, la fórmula del cambio de bases para la matriz de una isometría:

$$\begin{array}{ccccc} & B & \xrightarrow{A} & B & \\ P & \downarrow & \bigcap & \downarrow & P \\ & B_c & \xrightarrow{?} & B_c & \end{array} \quad \Rightarrow \quad M(sim; B_c, B_c) = P.A.P^{-1}$$

obtenemos en nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M(sim; B_c, B_c);$$

donde hemos calculado previamente:

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$