

1. Justifica razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- (a) La matriz $A = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$ es la matriz respecto de la base canónica de la simetría en \mathbb{R}^2 respecto de la recta generada por el vector $(3, 1)$.
- (b) El núcleo de la aplicación lineal asociada a la siguiente matriz, sea cual sea el valor de a , tiene dimensión 2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3a & -1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Si existiese una aplicación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m dada por $f(x) = Ax$ que verificase que $\dim(\ker(f)) = 3$ y $\text{rango}(A) = 4$, entonces $n = 7$ y $m \geq 4$.

2. Dada la aplicación lineal siguiente:

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \mapsto (x + y + 2z, -y - 3z)$$

- (a) Calcula $M(f; B, B')$ siendo $B = \{(1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ y $B' = \{(0, 1), (1, 0)\}$.
- (b) Calcula una base de $\ker(f)$.

3. Calcula, respecto de la base canónica, la matriz de la simetría en \mathbb{R}^3 respecto del plano de ecuación $\{y = z\}$.

Soluciones:

1. a) Verdadero. Primero verificamos que A corresponde a una isometría, es decir, comprobamos que A es ortogonal:

$$A \cdot A^t = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, como el determinante de A es igual a (-1) sabemos que corresponde a una simetría, por lo que basta comprobar si el vector $v = (3, 1)$ es fijo para ver si está o no en la recta de simetría:

$$A \cdot v = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = v$$

1. b) Verdadero. En general sabemos que si una matriz tiene n columnas (la aplicación asociada sale de \mathbb{R}^n) se verifica que: $\dim(\ker(A)) = n - \text{rango}(A)$, por ello, basta con estudiar el rango, lo que haremos a través de transformaciones por filas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3a & -1 \end{pmatrix} \stackrel{2^a - 3 \times 1^a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 1 \\ 0 & -1 & 3a & -1 \\ 0 & -1 & 3a & -1 \end{pmatrix} \stackrel{3^a - 2^a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a & 1 \\ 0 & -1 & 3a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde observamos que el rango es 2 independientemente del valor de a , por lo que $\dim(\ker(A)) = 4 - \text{rango}(A)$ también vale 2 independientemente del valor de a .

1. c) Verdadero. Por un lado:

$$4 = \text{rango}(A) = \dim(\text{Im}(f)) \leq \dim(\mathbb{R}^m) = m, \Rightarrow 4 \leq m;$$

y por otro lado

$$n = \dim(\ker(f)) + \text{rango}(A) = 3 + 4 = 7, \Rightarrow n = 7.$$

2. a) Podemos hacerlo de dos formas (al menos):

forma 1: Directamente. Calculamos las imágenes de los vectores de la base B y los ponemos en coordenadas respecto de B' :

$$\begin{aligned} f(1, 0, 1) &= (3, -3) = (-3) \times (0, 1) + 3 \times (1, 0) \\ f(1, 0, 0) &= (1, 0) = 0 \times (0, 1) + 1 \times (1, 0) \\ f(0, 1, 0) &= (1, -1) = (-1) \times (0, 1) + 1 \times (1, 0) \end{aligned}$$

de donde construimos la matriz pedida

$$M(f; B, B') = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

forma 2: Pasando por $M(f; B_c, B_c)$. Fácilmente obtenemos la matriz A de f con respecto a las bases canónicas y las matrices de cambio de base:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C_{B'B_c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_{BB_c} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y usando la fórmula del cambio de bases para la matriz de una aplicación:

$$\begin{array}{ccccc} B_c & \xrightarrow{A} & B_c & & \\ C_{BB_c} & \uparrow & \cap & \uparrow & C_{B'B_c} \\ B & \xrightarrow{?} & B' & \Rightarrow & M(f; B, B') = (C_{B'B_c})^{-1} \cdot A \cdot C_{BB_c} \end{array}$$

obtenemos en nuestro caso:

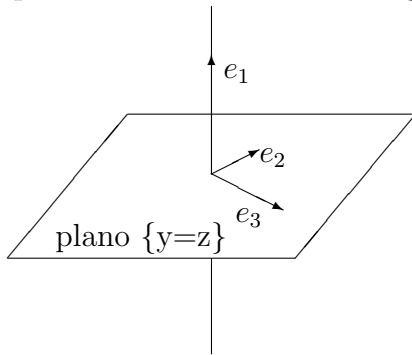
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. b) Lo calculamos directamente de la definición:

$$\ker(f) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x + y + 2z = 0 \\ -y - 3z = 0 \end{array} \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = -3\lambda \\ z = \lambda \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

de donde sacamos la base formada por un sólo vector: $B = \{(1, -3, 1)\}$.

3. Como siempre, primero construimos una base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 de manera que e_1 esté en la recta ortogonal al plano dado y $\{e_2, e_3\}$ formen base de dicho plano:



$$B = \{e_1, e_2, e_3\} \text{ base de } \mathbb{R}^3$$

En este caso, el vector e_1 lo deducimos de la ecuación de plano, ya que $y - z = 0$ es lo mismo que $\langle (0, 1, -1), (x, y, z) \rangle = 0$, y obtenemos el vector $e_1 = (0, 1, -1)$ ortogonal a todo el plano. Por otro lado, para obtener e_2 y e_3 resolvemos la ecuación:

$$\text{Plano} = \{y - z = 0\} = \left\{ \begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \mu \end{array} , \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

Podemos pues elegir $e_2 = (1, 0, 0)$ y $e_3 = (0, 1, 1)$. Damos ahora la matriz de la simetría respecto de esta base y la matriz P de cambio de base:

$$A = M(\text{sim}; B, B) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = C_{BB_c} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Usando, como siempre, la fórmula del cambio de bases para la matriz de una isometría:

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{A} & B & & \\ P & \downarrow & \cap & \downarrow & P \Rightarrow M(\text{sim}; B_c, B_c) = P.A.P^{-1} \\ & & ? & & \\ B_c & \xrightarrow{\quad} & B_c & & \end{array}$$

obtenemos en nuestro caso:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M(\text{sim}; B_c, B_c);$$

donde hemos calculado previamente:

$$P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$