Universidad de Granada
Facultad de Ciencias
Dept. Matemática Aplicada

MÉTODOS NUMÉRICOS
Grupo A
Licenciatura en Matemáticas

3ª prueba de evaluación continua

13-feb-06

Interpolación (Polinómica)

A. Test.

1. Al resolver un problema de interpolación polinómica de Lagrange en $\mathbb{P}_7[x]$ usando los valores de una cierta función en 8 nodos diferentes hemos obtenido un polinomio de grado 5. Entonces:

   ☐ en $\mathbb{P}_7[x]$ no hay unicidad.

   ☐ en $\mathbb{P}_6[x]$ puede no haber solución.

   ☐ en $\mathbb{P}_8[x]$ hay unicidad y se obtiene el mismo polinomio.

   ☒ en $\mathbb{P}_6[x]$ hay unicidad y se obtiene el mismo polinomio.

2. La siguiente tabla de diferencias divididas con argumentos repetidos (incompleta):

x_i	y_i					
0	2					
		(1)				
0	(2)		2			
		3		(11)		
1	(5)		(13)		(5)	
		(16)		6		1
1	(5)		(7)		(4)	
		(2)		2		
-1	1		3			
		-4				
-1	1					

   corresponde al polinomio de interpolación...

   ☒ $p(x) = x^5 + 4x^4 - 3x^2 + x + 2$.

   ☐ $p(x) = x^5 + 4x^4 - x^3 - 5x^2 + 2$.

   ☐ $p(x) = x^5 + 5x^4 + 11x^3 + 2x^2 + x + 2$.

   ☐ $p(x) = x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 2$.

3. Si pretendemos encontrar un polinomio $p(x)$ de la forma $p(x) = ax^2 + b(x^2 - 2) + c$ que verifique las condiciones: $p(0) = -4$, $p(1) = 1$ y $p(2) = 13$, ...

   ☒ ... no encontraremos ninguno.

   ☐ ... podemos encontrar varios diferentes.

   ☐ ... encontraremos sólo uno.

   ☐ ... como $p(x) = (a+b)x^2 + (c-2b)$ no tiene término de grado 1, hay que eliminar una de las condiciones para poder plantearse el problema de interpolación.

B. Verdadero o Falso

4. Si llamamos $p(x) \in \mathbb{P}_4[x]$ al polinomio que interpola a la función $f(x) = (x+1)^2(2x-3)^2$ en los nodos $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$, entonces, el coeficiente líder de $p(x)$ es 6.

   Falso. Como $f(x) \in \mathbb{P}_4[x]$ y se interpola en 5 nodos, entonces $p = f$ y su coeficiente lider es 4.

5. Si en el problema de interpolación de Hermite siguiente:

x	0	1
$f(x)$	y_0	y_1
$f'(x)$	y_0'	y_1'

se cumple que $y_0 < y_1$ y que tanto y_0' como y_1' son positivas, entonces el polinomio de interpolación es una función creciente (es decir, $p'(x) \geq 0$ para cualquier x).

Falso. Hay infinitos contraejemplos; pensamos en una función (polinomio de grado 3), que coincida con su polinomio de interpolación, y cuya gráfica crece desde $-\infty$ hasta anularse en 0, luego sube un poco para volver a bajar y alcanzar su segundo cero antes de llegar al 1, luego baja para volver a subir y tomar su tercer cero antes de llegar al 1 y ya sigue creciendo hata ∞. Analíticamente $f(x) = p(x) = x(x-a)(x-b)$ con $0 < a < b < 1$.

6. Si f es producto de dos funciones $f(x) = g(x)h(x)$ entonces se verifica que:

$$f[x_0,x_1] = g[x_0]\,h[x_0,x_1] + g[x_0,x_1]\;h[x_1].$$

Verdadero. Basta hacer la cuenta:

$$\begin{aligned} g[x_0]\,h[x_0,x_1] + g[x_0,x_1]\;h[x_1] &= g(x_0)\,\frac{h(x_0)-h(x_1)}{x_0-x_1} + \frac{g(x_0)-g(x_1)}{x_0-x_1}\,h(x_1) \\ &= \frac{g(x_0)\,h(x_0)-g(x_1)\,h(x_1)}{x_0-x_1} = f[x_0,x_1] \end{aligned}$$

C. Ejercicio.

7. Aproxima el valor de $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,dx$ por el de la integral del polinomio que interpola a $f(x) = e^{-x^2}$ usando datos:

a) ... de tipo Lagrange en los nodos $\left\{-\frac{2}{3},\ 0,\ \frac{2}{3}\right\}$.

b) ... y de tipo Hermite en los nodos $\left\{-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right\}$.

c) Sabiendo que $I = 1.4936482656248544\ldots$ indica el error relativo cometido al aproximarlo por la integral de los dos polinomios de interpolación.

d) Llamando $p_L(x)$ y $p_H(x)$ a los polinomios obtenidos en la interpolación de Lagrange y de Hermite respectivamente, da dos aproximaciones del valor de $f(0)$ usando sendos polinomios y determina el error absoluto cometido.

Solución. Los polinomios son: $p_L(x) = 1 + \dfrac{9}{4}\left(e^{-4/9}-1\right)x^2$ y $p_H(x) = \dfrac{13}{9}e^{-4/9} - e^{-4/9}x^2$ y sus integrales son $I_L = (1+3e^{-4/9})/2 = 1.4617705$ e $I_H = 20e^{-4/9}/9 = 1.424845307$ respectivamente.

Los errores relativos cometidos al aproximar I por I_L e I_H son $|1.46177-1.49365|/1.49365 = 0.02134 \sim 2.1\%$ y $|1.42485-1.49365|/1.49365 = 0.046063 \sim 4.6\%$ respectivamente.

Por último, puesto que p_L interpola a f en 0, la aproximación es 1 y el error cometido es 0; en el segundo caso la aproximación es $p_H(1) = 13e^{-4/9}/9 = 0.926149$ y el error absoluto $|0.926149-1| = 0.073851$.