Universidad de Granada
Facultad de Ciencias
Dept. Matemática Aplicada

MÉTODOS NUMÉRICOS
Grupo A
Licenciatura en Matemáticas

2ª prueba de evaluación continua

19-ene-06

Resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales

A. Teoría. Indíquese, exponiendo claramente las razones, la veracidad o falsedad de cada una de las afirmaciones siguientes.

1. Toda matriz diagonal y regular admite una descomposición de Cholesky: $A = LL^t$.

   $\boxed{\text{Falso}}$: Los elementos de la diagonal tendrían que ser además positivos; $-$I es un contraejemplo ya que de existir L cumpliría $l_{ii}^2 = (-1)$, lo que no es posible.

2. Si multiplicamos una matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times3}$ por la izquierda por la siguiente matriz,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

   entonces, el resultado MA es una matriz cuyas dos primeras filas coinciden con las de A y cuya tercera fila es igual a la tercera fila de A más cuatro veces la segunda fila de A.

   $\boxed{\text{Falso}}$: la tercera fila de MA es igual a la segunda fila de A más cuatro veces la tercera fila de A.

3. Siempre que sea posible aplicarle el método de Gauss–Seidel a un sistema dado, la correspondiente matriz B_{GS} obtenida tienes ceros en todos los elementos de su diagonal.

   $\boxed{\text{Falso}}$: Eso ocurre con B_J; como contraejemplo podemos usar la matriz B_{GS} dada en el último apartado del problema **B**.

4. Si partimos de un sistema diagonal $Dx = b$, con $det(D) \neq 0$ entonces $B_J = 0$ y por lo tanto el método aproximado de Jacobi se convierte en exacto, ya que en la primera iteración se alcanza la solución exacta y las posteriores iteraciones son iguales.

   $\boxed{\text{Cierto}}$: A partir, por ejemplo, de la descomposición $D = D - L - U$, con $L = U = 0$ en este caso, obtenemos $B_J = D^{-1}(L+U) = 0$. Por ello $x_J^1 = 0x_J^0 + c_J = c_J = D^{-1}b = x =$ la solución.

5. Si $L = (l_{i,j})$ es una matriz triangular inferior regular de orden n y $S = (s_{i,j})$ es su inversa, entonces para $j = 1, 2, \dots, n$ y para $i = j, (j+1), \dots, n$, se verifica que:

$$s_{i,j} = \Big(\delta_{i,j} - \sum_{k=j}^{i-1} l_{i,k}\, s_{k,j}\Big)/l_{i,i},$$

   donde $\delta_{i,j}$ es la llamada delta de Krönecker, cuyo valor es $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$.

$\boxed{\text{Cierto}}$: Como $LS = I = (\delta_{i,j})$ si miramos la componente (i,j) de esta igualdad tendremos

$$\delta_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} l_{i,k} s_{k,j}, \ \forall\, i, \ \forall\, j.$$

Pero como además S y L son triangulares inferiores, sólo nos interesan las componentes $j \leq i$ (ya que el resto son ceros) y, para estas, la sumatoria se queda entre j e i:

$$\delta_{i,j} = \sum_{k=j}^{i} l_{i,k} s_{k,j}, \ \forall\, i \geq j.$$

Despejando el último sumando $l_{i,i} s_{i,j}$ se obtiene la igualdad pedida.

6. Si aplicamos al siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{rcr} 5x+y &=& 7 \\ x+2y-z &=& -1 \\ -y+3z &=& 4 \end{array}\right\}$$

el método de relajación con $\omega = 3/2$, obtendremos convergencia.

$\boxed{\text{Cierto}}$: La matriz de coeficientes es real, simétrica, con la diagonal de elementos positivos y además

$$\det\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 22 > 0, \ \det\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 9 > 0, \ y \ \det(5) = 5 > 0,$$

por lo que es definida positiva; aplicando los teoremas de convergencia sabemos que relajación converge para cualquier ω entre 0 y 2.

B. Problema. Consideramos el S.E.L. $Ax = b$, del que se conoce parcialmente una descomposición LU como la que sigue

$$A = \begin{pmatrix} a & 4 & b \\ -1 & 9 & 3 \\ 2 & c & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ d & e & 0 \\ f & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g & -1 \\ 0 & -5 & h \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} = LU.$$

1. Deduce los valores omitidos en cada matriz.

$\boxed{\text{Solución:}}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 \\ -1 & 9 & 3 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = LU.$$

2. Usa esa descomposición para calcular la solución del sistema $Ax = b$ con $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Solución:}}$

$$Ly = b \ \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad y \qquad Ux = y \ \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 8/5 \\ -1/10 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

3. Escribe las ecuaciones del método iterativo de Gauss–Seidel y calcula 3 iteraciones a partir de la iteración inicial $\begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \\ z^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución: Ecuaciones de GS:

$$\begin{aligned}
x^{k+1} &= -y^k + z^k \\
y^{k+1} &= \frac{1}{9}\left(2 + x^{k+1} - 3z^k\right) = \frac{1}{9}\left(2 - y^k - 2z^k\right) \\
z^{k+1} &= \frac{1}{3}\left(7 - 2x^{k+1} - 7y^{k+1}\right) = \frac{1}{27}\left(49 + 25y^k - 4z^k\right)
\end{aligned}$$

Iteraciones:

iteración	x	y	z
(0)	1	0	1
(1)	1	0	$\frac{5}{3} = 1.66$
(2)	$\frac{5}{3} = 1.66$	$\frac{-4}{27} = -0.15$	$\frac{127}{81} = 1.57$
(3)	$\frac{139}{81} = 1.72$	$\frac{-80}{729} = -0.11$	$\frac{3161}{2187} = 1.45$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
exacta:	1.6	-0.1	1.5

4. Teniendo en cuenta que la matriz B_{GS} es:

$$B_{GS} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 0 & -27 & 27 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 25 & -4 \end{pmatrix}$$

y que sus valores propios son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \left(-0.13 - 0.45\,i\right)$ y $\lambda_3 = \left(-0.13 + 0.45\,i\right)$, ¿convergerá el método de Gauss–Seidel?

Solución:

Sí, puesto que $\rho(B_{GS}) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} = \max\{0,\ 0.4684,\ 0.4684\} = 0.4684 < 1$. Por cierto, puesto que me dan los valores propios, la matriz no se usa para nada, pero se puede aprovechar para verificar que las ecuaciones estén bien y para dar un contraejemplo a la pregunta 3. de Teoría.