Universidad de Granada
Facultad de Ciencias
Dept. Matemática Aplicada

MÉTODOS NUMÉRICOS
Grupo A
Licenciatura en Matemáticas

1ª prueba de evaluación continua

23-nov-05

Resolución numérica de ecuaciones escalares

A. Test. En cada apartado márquese **claramente** con una X la opción que se considere correcta.

1. Una función f continua en $[a,b]$ cumpliendo $f(a)f(b) \geq 0$:

   ☐ no puede tener ceros en $[a,b]$.

   ☒ si además f es creciente, sólo puede anularse en $x = a$ ó $x = b$.

   ☐ tiene algún cero, pero no se puede saber si es único.

   ☐ no cumple ninguna de las otras tres afirmaciones.

   Justificación: $f(x) = x^2 - 1$ en $[-2,2]$ contradice la primera. $f(x) = x$ en $[1,2]$ contradice la tercera. Ahora si f crece, de anularse en a no lo puede hacer después y si lo hace en b no lo puede hacer antes; por ello "sólo **puede** anularse en los extremos".

2. Dada una sucesión de Sturm $\{f_0, f_1, \ldots, f_m\}$ en el intervalo $[a,b]$:

   ☒ $\{e^x f_0, e^x f_1, \ldots, e^x f_m\}$ también es de Sturm en $[a,b]$.

   ☐ $\{\ln(x) f_0, \ln(x) f_1, \ldots, \ln(x) f_m\}$ también es de Sturm en $[a,b]$ (siempre que $a > 0$).

   ☐ $\{f_0^2, f_1^2, \ldots, f_m^2\}$ también es de Sturm en $[a,b]$.

   ☐ $\{f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}, f_m^2\}$ también es de Sturm en $[a,b]$.

   Justificación: La segunda es falsa por muchas razones, por ejemplo, la última función $\ln(x) f_m$ cambia de signo en cuanto que $a < 1$. La tercera es falsa porque las raíces de f_0^2 son dobles. La cuarta es falsa porque si $f_m < 0$ entonces $f_m^2 > 0$ y la propiedad $\left[si\ f_{m-1}(r) = 0 \Rightarrow f_{m-2}(r) f_m^2(r) < 0\right]$ no se verifica. La primera es cierta; basta adaptar el ejercicio hecho en clase para constantes positivas.

3. El método $x_{n+1} = \dfrac{x_n (x_n^2 + \beta)}{3x_n^2 + 2}$ con β adecuado para aproximar $s = \sqrt{m}$ (con $m \geq 2$):

   ☒ es localmente convergente para cualquier $m \geq 2$ y al menos cuadrático si $m = 2$.

   ☐ es globalmente convergente en cualquier intervalo que contenga al cero.

   ☐ en el caso $m = 2$ y $\beta = 6$ hay convergencia local cuadrática pero no cúbica.

   ☐ no cumple ninguna de las tres afirmaciones.

   Justificación: Para que $\sqrt{m}$ sea punto fijo, fácilmente observamos que β ha de tomar el valor $\beta = 2(m+1)$. Para este valor de β calculamos $g'[x] = \dfrac{4 + 3x^2 + m(4 - 6x^2)}{(2 + 3x^2)^2}$, y por lo tanto $g'[s] = \dfrac{2 - m}{2 + 3m}$. La segunda opción no es cierta ya que $g'[0] = (1 + m) > 1$. La tercera no es cierta porque para $m = 2$ y $\beta = 6$ calculamos $g''(\sqrt{2})$ y sí sale cero (por cierto, hecho en clase). La primera es cierta ya que $|g'[s]|$ (calculado antes) es siempre inferior a 1 y cero para $m = 2$.

4. Al aplicar el método de bisección para resolver una ecuación en $[-1,4]$:

   ☐ haciendo 17 iteraciones garantizamos un error absoluto inferior a 10^{-5}.

   ☒ haciendo 25 iteraciones garantizamos un error absoluto inferior a 10^{-7}.

   ☐ haciendo 7 iteraciones garantizamos un error absoluto inferior a 10^{-2}.

   ☐ todas las afirmaciones son ciertas.

   Justificación: Para garantizar un error absoluto menor que 10^{-a} el número de iteraciones ha de ser al menos $n = \dfrac{\log(5\times 10^a)}{\log(2)} - 1$ y sólo la segunda afirmación cumple esta condición.

5. Consideramos un polinomio $p(x)$ de grado n con, al menos, $m+1$ raíces reales simples contenidas en el intervalo $[a,b]$. Bajo estas condiciones, la sucesión de Sturm asociada a dicho polinomio sobre el intervalo $[a,b]$:

   ☒ tiene al menos $(m+2)$ funciones.

   ☐ tiene al menos $(m+1)$ funciones.

   ☐ tiene a lo sumo n funciones.

   ☐ tiene a lo sumo $(n-m+1)$ funciones.

   Justificación: Si un polinomio tiene (al menos) $(m+1)$ raíces simples, la sucesión de Sturm (sobre el intervalo adecuado) tendrá que tener una "diferencia de cambios de signo" (al menos) de $(m+1)$, por lo que tendrá que haber (al menos) $(m+2)$ "signos" en una de las listas, que provienen de (al menos) $(n+2)$ funciones; por ello la primera opción es cierta. La segunda es falsa por el mismo motivo. La tercera es falsa puesto que se puede tomar un polinomio de manera que $n = m+1$ (todas las raíces simples) y estaríamos ante el caso anterior. La última es simplemente absurda.

6. El método de Steffensen:

   ☐ acelera el método de Bisección hasta orden $p \geq 2$.

   ☐ acelera el método de la Secante hasta orden $\sqrt{5}$.

   ☒ aplicado a $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{2}$ proporciona una sucesión constante.

   ☐ verifica las otras tres afirmaciones.

   Justificación: El método de Steffensen se aplica a sucesiones generadas por iteración funcional por lo que, a priori, no es posible aplicarlo ni a Bisección ni a Secante. La tercera afirmación se verifica rápidamente

$$\left.\begin{array}{l} x_0 \; dado, \\ x_1 = x_0/2 \\ x_2 = x1/2 = x_0/4 \end{array}\right\} \Rightarrow x_0' = x_0 + \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_2 - 2x_1 + x_0} = x_0 + \frac{(x_0/2 - x_0)^2}{x_0/4 - 2x_0/2 + x_0} = 0,$$

   (hecho además en clase) y la constante es cero.

B. Ejercicio. Consideramos la ecuación:

$$x^7 + x - 1 = 0.$$

a) Demuéstrese que posee una única solución real y que está comprendida entre 0 y 1.

b) Justifíquese razonadamente por qué (para esta ecuación) el método de Newton–Raphson converge localmente con velocidad cuadrática.

c) Aplíquese dicho método tomando $x_0 = 1$ y parando cuando la distancia entre dos iteraciones sucesivas sea inferior a 10^{-3}.

solución

a) Como $f'(x) = 1 + 7x^6$ es siempre positiva, no puede tener más de una raíz real, y como $f(0)f(1) < 0$ hay exactamente una y está en ese intervalo.

Quienes opten por construir sucesiones de Sturm obtendrán (con mucho más trabajo)

$$f_0 = x^7 + x - 1, \quad f_1 = 1 + 7x^6, \quad f_2 = 7 - 6x, \qquad f_3 = cte < 0,$$

que, usadas en el intervalo $[-2,2]$ (proporcionado por el Teorema de acotación de Sturm), nos dan un sólo cambio de signo y, por lo tanto, una sola raíz real. Ver que está entre 0 y 1 es trivial.

b) Basta comprobar que se verifican las hipótesis del Teorema de convergencia local para Newton–Raphson: Usando que f es creciente, o que $f' > 0$, o que tiene grado impar, la raíz hallada no puede ser doble, y como f es 2 veces (es un polinomio) derivable ya tenemos que N–R converge. Como además f es 4 veces derivable (es un polinomio) concluimos que la convergencia es cuadrática.

c) Calculamos $g(x) = x - \dfrac{x^7 + x - 1}{1 + 7x^6} = \dfrac{1 + 6x^7}{1 + 7x^6}$, e iteramos:
$x_0 = 1$, $x_1 = 0.825$, $x_2 = 0.81036$ $x_3 = 0.79700$, $x_4 = 0.796545$, STOP .