Universidad de Granada
E.U.A.T.
Dept. Matemtica Aplicada

ÁLGEBRA LINEAL
Grupos 1ºE y 1ºG
Arquitectura Técnica

Ejercicios propuestos

(Tema 6) – abr/06

Plano y Espacio geométrico

1. En $\mathbb{R}^n$, un sistema de referencia también se puede construir a partir de $(n+1)$ puntos $\{o, p_1, p_2, ..., p_n\}$ (cuatro puntos en el caso de $\mathbb{R}^3$) de la siguiente forma:

$$R = \left\{o, \{\overrightarrow{op_1}, \overrightarrow{op_2}, ..., \overrightarrow{op_n}\}\right\},$$

para lo que el conjunto $B = \{\overrightarrow{op_1}, \overrightarrow{op_2}, ..., \overrightarrow{op_n}\}$ debe formar una base de $\mathbb{R}^n$.
En $\mathbb{R}^3$, indica cuáles de los siguientes conjuntos generan un sistema de referencia:

   a) $o = (0,1,1),\ p_1 = (0,0,1),\ p_2 = (1,0,0),\ p_3 = (1,1,1)$.

   b) $o = (1,-1,1),\ p_1 = (0,0,1),\ p_2 = (1,0,1),\ p_3 = (0,1,1)$.

2. En el espacio $\mathbb{R}^3$ se tiene el sistema de referencia $R = \{o, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}\}$. Se considera el sistema de referencia $R' = \left\{o', \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}\right\}$ donde las coordenadas del punto o' con respecto a R son $(2,-4,7)$. Si el punto a tiene en el sistema de referencia R coordenadas $(3,7,-4)$ ¿son $(1,11,-11)$ sus coordenadas en R'?

3. Responde justificadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

   a) Hay una única recta r que pasa por un punto p y el paralela a una recta s.

   b) Hay una única recta en $\mathbb{R}^3$ que pasa por un punto p y es paralela a un plano P.

   c) Un plano P en $\mathbb{R}^3$ queda determinado dando tres puntos cualesquiera.

   d) $R = \left\{(1,1)\ ; \left\{(1,2),\ (2,1)\right\}\right\}$ es un sistema de referencia de $\mathbb{R}^2$

   e) Si los puntos medios de los lados de un triángulo abc son $m = (1,0,0)$, $n = (0,1,0)$ y $p = (0,0,1)$, entonces $a = (-1,1,1)$, $b = (1,-1,1)$ y $c = (1,1,-1)$. (Jul-99)
   Nota: El punto medio entre dos puntos dados a y b se construye como $m = a + \frac{1}{2}\overrightarrow{ab}$.

4. Estudia la posición relativa de las rectas de $\mathbb{R}^3$ r y r' en cada caso:

   a) $r : \left\{ \begin{array}{ll} 3x-2y & = 7 \\ y+3z & = -2 \end{array} \right. \quad r' : \left\{ \begin{array}{ll} 3x-y & = 2 \\ x+y+z & = 1 \end{array} \right.$

   b) $r : \left\{ \begin{array}{ll} x-2y & = -6 \\ y-z & = 2 \end{array} \right. \quad r' : \left\{ \begin{array}{ll} x = & 4-4\lambda \\ y = & -1-4\lambda \\ z = & 3-2\lambda \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$

   c) $r : \left\{ \begin{array}{ll} y & = 0 \\ x+2z & = -1 \end{array} \right. \quad r' : \left\{ \begin{array}{ll} x = & 1+6\lambda \\ y = & 0 \\ z = & -1-3\lambda \end{array} \right. \quad \lambda \in \mathbb{R}$

5. Estudia la posición relativa de las siguientes rectas de $\mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{lrlcrrl} a)\ r: & 1-2x+3y & = 0 & \text{y} & r': & 4+x-2y & = 0 \\ b)\ s: & 4+x+y & = 0 & \text{y} & s': & 1-2x+4y & = 0 \\ c)\ t: & 1-x-2y & = 0 & \text{y} & t': & -2+3x+y & = 0 \end{array}$$

6. Determina ecuaciones paramétricas y cartesiana de las siguientes rectas y exprésalas como intersección de dos planos.

   a) La recta r que pasa por los puntos $a = (1,1,-1)$ y $b = (2,2,3)$.

   b) La recta s que pasa por el punto $p = (1,0,1)$ y tiene a $\vec{v} = (1,2,1)$ por vector director.

7. Estudia la posición relativa de los planos π_1 y π_2 en los casos siguientes:

$$a)\left\{\begin{array}{ll}\pi_1: & 3x-y+z = 4\\ \pi_2: & x+2y-z = 2\end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{ll}\pi_1: & x-2y+3z = 4\\ \pi_2: & 2x-4y+6z = 7\end{array}\right.$$

$$c)\left\{\begin{array}{ll}\pi_1: & 3x-y+2z = 5\\ \pi_2: & 6x-2y+4z = 10\end{array}\right. \qquad d)\left\{\begin{array}{ll}\pi_1: & 3x+y = 2\\ \pi_2: & x-3y+4z = 7\end{array}\right.$$

8. Estudia la posición relativa de la recta r y el plano π en los casos:

$$a)\quad r:\left\{\begin{array}{l}x+2y = 3\\ 3y+4z = 1\end{array}\right. \qquad \pi: 3x-y+z=0$$

$$b)\quad r:\left\{\begin{array}{rl}x= & 3+\lambda\\ y= & 1-2\lambda \quad \lambda\in\mathbb{R}\\ z= & 2+5\lambda\end{array}\right. \qquad \pi: 4x+7y+2z=2$$

$$c)\quad r:\left\{\begin{array}{l}3x-y+z = 2\\ x-2y+5z = -1\end{array}\right. \qquad \pi: 4x-3y+6z=1$$

9. Halla unas ecuaciones paramétricas y la ecuación cartesiana de los planos siguientes

   a) Pasa por los puntos $a = (5,0,2)$ y $b = (1,4,2)$, y es paralelo a la recta dada por la ecuación (Jul-99)
$$\left\{\begin{array}{l}4x-y = 5\\ 3y-4z = 5\end{array}\right.$$

   b) Pasa por $a = (1,0,1)$, $b = (2,0,-1)$ y $c = (1,1,2)$.

   c) Pasa por $p = (3,-1,0)$ y tiene como vectores directores $\vec{u} = (1,2,3)$ y $\vec{v} = (0,0,1)$.

   d) Pasa por $q = (2,2,2)$ y un es perpendicular al vector es $\vec{w} = (1,2,-1)$.

10. A partir de los datos del ejercicio 9*a*), calcula la recta r, perpendicular al plano calculado y que pase por el punto a. (Jul-99)

11. Considera los puntos de $\mathbb{R}^3$: $a = (1,1,0)$, $b = (0,-1,2)$, $c = (3,0,-2)$: (Jun-01)

   a) Calcula la distancia del punto a a la recta que pasa por b y por c.

   b) Determina el área del triángulo que determinan a, b y c.

   c) Determina un punto p de modo que el tetraedro de vértices a, b, c y p tenga volumen 2. ¿Es único este punto? En caso negativo, describe todos los puntos.

12. En $\mathbb{R}^3$ con el sistema de referencia canónico se consideran los planos (Jul-01)

$$\pi_1 = \{(x,y,z)\ ;\ x+y+z-3=0\} \quad \pi_2 = \{(x,y,z)\ ;\ 2x+3y-5z+1=0\}$$

y el punto $a = (1,1,1)$.

a) Halla la recta r que pasa por a, está contenida en π_1 y es perpendicular a $\pi_1 \cap \pi_2$.

b) Halla la recta proyección ortogonal de $b = (0,0,0)$ sobre el plano $x+y+z=1$.

13. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ se consideran las rectas de $\mathbb{R}^3$ siguientes:

$$r : \left\{ \begin{array}{ll} x-2y & = 1 \\ y+z & = \alpha \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{ll} x-3z & = -1 \\ y-z & = 2 \end{array} \right.$$

a) Calcula los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que r y s se corten.

b) Para cada uno de los valores obtenidos en el apartado anterior calcula el plano que contiene a r y a s. (Dic-01)

14. Halla la ecuación del plano que pasa por el punto p, de coordenadas $(2,-1,4)$ en el sistema de referencia canónico, y que al cortar con los ejes coordenados determina sobre el eje z un segmento dos veces mayor que los determinados sobre los ejes x e y. (Jun-02)

15. Se consideran las rectas (Jul-02)

$$r : \left\{ \begin{array}{ll} 2x-y & = -1 \\ x-z & = -3 \end{array} \right. \quad \text{y} \quad s : \left\{ \begin{array}{ll} x+y & = 1 \\ x-z & = -2 \end{array} \right.$$

a) Indica la posición relativa de las rectas.

b) Calcula la distancia entre ambas rectas.

c) Obtén la proyección del punto $p = (0,1,3)$ sobre el plano que contiene a s y es paralelo a r.

16. Calula la ecuaciones cartesianas de la recta de $\mathbb{R}^3$ perpendicular $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x+y=1 \\ x-z=1 \end{array} \right.$, que pasa por el punto $p = (3,-1,5)$ y que es paralela al plano $\Pi \equiv \{y = 0$. (Jun-03)

17. ¿Es posible encontrar un plano que contenga a las rectas: $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ z=3 \end{array} \right.$ y $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} y=0 \\ z=0 \end{array} \right.$? Justifica la respuesta. (Jun-04)

18. Halla un punto p que equidiste de los siguientes planos (Jun-05):

$$\Pi : x+2y+3z = 2, \qquad \Pi' : x+2y+3z = -1.$$

19. *a*) Determina para qué valores de λ los conjuntos geométricos siguientes son una recta o un plano.

$$\left\{ \begin{array}{ll} x+y+z & = \lambda \\ \lambda x - y - z & = 1 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{ll} 3x & = \lambda + 1 \\ 4x + \lambda y + 2z & = 1 \end{array} \right.$$

b) Determina para cada valor de λ sus posiciones relativas. (Jul-05)

20. Se considera la recta $r \equiv \{2x-y+z=1 \, , \, x-2y-z=-2\}$. Halla razonadamente: (sep-05)

a) Unas ecuaciones paramétricas de un plano que contenga a la recta r.

b) La ecuación implícita de un plano paralelo a la recta r.

c) La ecuación de un plano que corte a la recta r.

d) Unas ecuaciones paramétricas de una recta s paralela a la recta r.