Universidad de Granada
E.U.A.T.
Dept. Matemtica Aplicada

ÁLGEBRA LINEAL
Grupos 1ºE y 1ºG
Arquitectura Técnica

Ejercicios propuestos

(Tema 5) – mar/06

Diagonalización de matrices y endomorfismos

1. Comprueba que las siguientes matrices son diagonalizables, y encuentra en cada caso la matriz de paso P (tal que $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ y $P^{-1}CP$ sean diagonales).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Prueba que las siguientes matrices tienen los mismos valores propios $\{1, 1, 5\}$ y que, pese a ello, no son semejantes.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Justifica si las siguientes afimaciones son verdaderas o falsas:

   a) Un subespacio propio de una matriz puede reducirse al vector cero.

   b) Un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ puede tener a $\lambda = 1$ como único valor propio y ser diagonalizable (**Jun 04**).

   c) Existe alguna matriz diagonalizable cuyos valores propios son π, 7 y 10^{-4}.

   d) $\lambda = 0$ es un valor propio de A si, y sólo si, $\det(A) = 0$.

   e) Si λ es un valor propio de A entonces λ^2 lo es de A^2.

   f) Si A es regular y λ es un valor propio de A entonces $\frac{1}{\lambda}$ lo es de A^{-1}.

   g) Dos matrices diagonalizables del mismo orden han de ser semejantes.

   h) Si A es una matriz cuadrada de orden 3 con autovalores: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 7$ y $\lambda_3 = 2$, entoces es diagonalizable y conocemos su polinomio característico.

   i) Sea A una matriz cuadrada de orden 2. Si su traza es 5 y su determinante -6 su polinomio característico es $\lambda^2 + 6\lambda + 5$.

   j) Si A es una matriz cuadrada de orden 2 tal que $\det(A) < 0$, entonces A es diagonalizable.

   k) Toda matriz diagonal es diagonalizable.

4. Calcula el valor de los parámetros a y b para que $\lambda = 0$ sea un valor propio de A con vector propio asociado $x = (2, 1, -2)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ b & -8 & -b \\ a & b & b \end{pmatrix}.$$

5. Diagonaliza por semejanza ortogonal las siguientes matrices y encuentra una matriz P tal que $A = P\,D\,P^t$ con D matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \ \textbf{(Sept 05)}.$$

6. Sean A, B y C matrices cuadradas de orden 3 con polinomios característicos:

$$p_A(\lambda) = -(\lambda^2-1)(\lambda-2), \quad p_B(\lambda) = -(\lambda^2+1)(\lambda-2), \quad p_C(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

¿Cuáles son los valores propios de cada una de estas matrices? ¿Podemos saber si son diagonalizables? Justifica la respuesta.

7. Se dice que $x \in \mathbb{R}^3$ es un vector fijo de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuando $f(x) = x$.

   a) Si A es la matriz de f respecto de la base canónica, demuestra que calcular los vectores fijos no nulos de f equivale a calcular los vectores propios de A asociados al valor propio $\lambda = 1$.

   b) Calcula los vectores fijos de las siguientes aplicaciones lineales y busca una base respecto de la cual su matriz sea diagonal:

$$g(x,y,z) = (x+z, y+2z,\ 3z) \ \textbf{(Jul 99)},$$

$$f(x,y,z) = (2x-2y, -x+y,\ 5x+10y-10z).$$

8. Calcula (de forma teórica) los valores propios de las siguientes isometrías de $\mathbb{R}^3$:

   a) Giro de ángulo $\theta = \frac{\pi}{2}$ respecto de cualquier recta.

   b) Giro de ángulo $\theta = \pi$ respecto de cualquier recta.

   c) Simetría respecto de algún plano.

   d) Giro de ángulo $\theta = \pi$ compuesto con simetría.

9. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal tal que $M(f; B_c, B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) Calcula la matriz asociada a f en la base $B = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$.

   b) Indica si el endomorfismo f es diagonalizable, y en caso afirmativo diagonalízalo.

   c) Decide si el vector $v = (1,2,3)$ pertenece a la imagen de f y en caso afirmativo halla un vector u de forma que $f(u) = v$. **(Jul 05)**