Universidad de Granada
E.U.A.T.
Dept. Matemtica Aplicada

ÁLGEBRA LINEAL
Grupos 1^{o}E y 1^{o}G
Arquitectura Técnica

Ejercicios propuestos

(Tema 4) – feb/06

Aplicaciones lineales e Isometrías

1. Determina cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales, en caso afirmativo calcular el núcleo e imagen:

   a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, \quad (x,y)\mapsto f(x,y)=(x+1,y+2),$

   b) $f:V_1\to V_2, \quad v\mapsto f(v)=0,$

   c) $I:V\to V, \quad v\mapsto I(v)=v,$

   d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad x\mapsto f(x)=x^2,$

   e) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2, \quad (x,y,z)\mapsto f(x,y,z)=(x+y+z,\pi x+17z),$

   f) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{P}_2[x], \quad (a,b,c)\mapsto f(a,b,c)=a+bx+cx^2.$

2. Construye la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ de forma que $f(0,1)=(2,-1)$ y $f(1,0)=(1,1)$.

3. Construye una aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ de forma que $f(0,1,2)=(2,-1)$ y $f(1,0,3)=(1,1)$.

4. Construye una aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ de manera que el vector $(1,2,1)$ esté en el Ker(f) y los vectores $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ en Im(f).

5. En $\mathbb{R}^3$ consideramos los subespacios $S=\mathcal{L}\{(0,1,0),(0,1,1)\}$ y $T=\mathcal{L}\{(1,0,0)\}$. Como sabemos, todas las proyecciones ortogonales son aplicaciones lineales, en particular las proyecciones sobre S y T (a las que llamaremos P_S y P_T respectivamente) lo son:

   a) Calcula, con respecto a las bases canónicas, las matrices de P_S y P_T.

   b) Comprueba que Ker(P_S)=T, Ker(P_T)=S, Im(P_S)=S y Im(P_T)=T y relaciónalo con el hecho de que S y T sean subespacios ortogonales entre sí.

6. Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 y $B=\{e_1,e_2,e_3\}$ una base para V. Comprueba que la información siguiente determina un único endomorfismo de V:

   $$f(v_1-v_2)=-7v_1+v_3, \quad f(3v_1+v_2-v_3)=-v_1+v_2, \quad f(v_1+v_2+2v_3)=4v_1-v_3.$$

   A continuación calcula $f(5v_1-7v_2+v_3)$.

7. Dada la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z)=(x+2y+z,2z)$, calcula bases y ecuaciones cartesianas de Ker(f) y de Im(f).

8. Dada la aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $f(x,y,z)=(x+y+z,2x+y,3x+2y+z)$, calcula una base de Ker(f) y otra de Im(f).

9. Calcula la matriz, respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}$, de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ verificando que

$$f(1,1,0,-1) = 4, \quad f(0,2,1,0) = 2, \quad f(1,3,1,0) = 0, \quad f(1,1,1,1) = 1\,.$$

10. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x+y+z, y+3z)$, calcula su matriz asociada respecto de las bases canónicas. Calcula también su matriz respecto de la bases $B = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$, y $B' = \{(1,1),(2,0)\}$.

11. Responde razonadamente a las siguientes preguntas:

    a) Si $f : V_1 \longrightarrow V_2$ es lineal y $dim(V_1) > dim(V_2)$ ¿puede ser f inyectiva?

    b) ¿Existe alguna aplicación lineal sobreyectiva de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$?

    c) Dada $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $h(x,y) = (2x+5y, 3x-ay)$, ¿qué condición debe verificar a para que h sea un isomorfismo?

    d) ¿Es posible encontrar dos aplicaciones lineales $f,g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de manera que $g \circ f$ sea la aplicación cero sin que ninguna de ellas sea constantemente cero?

    e) ¿Puede un vector estar en el núcleo y en la imagen de una misma aplicación lineal?

12. Dada la base $B = \{(1,2,0),(1,0,1),(2,2,2)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y sabiendo que la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

corresponde a la matriz f respecto de B y la base canónica, ($A = \mathcal{M}(f;B,B_c)$), calcula la matriz asociada a f respecto a la base canónica en el espacio de salida y B en el de llegada.

13. De dos aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sabemos que respecto de ciertas bases B_3, B_2, B_1 para $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$, respectivamente, vienen representadas por las siguientes matrices:

$$\mathcal{M}(f,B_3,B_2) = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -2 \\ -5 & 0 & 11 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}(g,B_2,B_1) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Calcula la matriz de la aplicación lineal compuesta $g \circ f$ respecto de las bases B_3 y B_1.

14. Dada la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que el vector $(1,a,-a,0)$ pertenezca a Im(f).

15. Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

    a) Si A es una matriz ortogonal, entonces AA^t también lo es.

    b) La aplicación lineal cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

    transforma todo el espacio $\mathbb{R}^3$ en la recta de $\mathbb{R}^2$ dada por la ecuación: $y = 2x$.

c) El núcleo de la aplicación lineal cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene dimensión 2 para cualquier elección de α.

16. Calcula las matrices de las siguientes isometrías con respecto a las bases canónicas:

a) Simetría en $\mathbb{R}^2$ con respecto a la recta $x = 3y$

b) Rotación en $\mathbb{R}^3$ de ángulo $\pi/4$ alrededor de la recta $\left\{ \begin{array}{l} x-y=0\,, \\ x+y+2z=0 \end{array} \right.$.

c) Simetría en $\mathbb{R}^2$ con respecto al plano $x = 2y$.

d) **Dic 04** Simetría en $\mathbb{R}^3$ respecto al plano de ecuación $z = x+2y$.

e) Rotación en $\mathbb{R}^3$ de ángulo $\pi/2$ alrededor de la recta $x = y = z$.

f) Simetría en $\mathbb{R}^3$ con respecto al plano ortogonal a la recta $x = y = z$.

g) La composición de las dos isometrías anteriores.

17. Determina de qué tipo son las isometrías de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada con respecto a la base canónica viene dada por

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, *b*) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, *c*) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, *d*) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

18. *a*) Comprueba que las *homotecias* preservan ángulos pero, en general, no son isometrías.
b) Usa el ejercicio siguiente para determinar cuáles sí son isometrías.
NOTA: La *homotecia de razón* λ es la aplicación lineal $h_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $h_\lambda(v) = \lambda v$, es decir, la identidad multiplicada por λ.

19. Demuestra que una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es isometría si y solo si preserva normas, es decir, si y solo $|f(x)| = |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

20. **Sept 05** Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ se considera la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$f(x,y,z) = (2x-\alpha y,\, x-y+\alpha z,\, \alpha(x+y+z))\ .$$

Halla razonadamente los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que f es inyectiva, sobreyectiva o biyectiva.

21. **Sept 04** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal cuya matriz asociada en las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Halla la dimensión de su núcleo, una base y sus ecuaciones cartesianas.

b) Halla la dimensión de su imagen, una base y sus ecuaciones cartesianas.

c) Halla la imagen del vector $v = (-1,3,4)$ respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

d) Halla la matriz de f respecto de las bases $B_1 = \{(-1,0,1),\, (2,1,0),\, (0,2,3)\}$ y $B_2 = \{(1,-1),\, (0,1)\}$.