Práctica 4:Interpolación polinómica

InterpolatingPolynomial[datos,variable]

Interpolación polinómica de Lagrange

■ A partir de datos cualesquiera:

In[1]:=
```
nodos = {-1, 4, 3, 7, 5, 2};
valores = {1, -1, 4, 2, 0, 3};
datos = Transpose[{nodos, valores}];
Print["datos tipo Lagrange = ", datos]
```

datos tipo Lagrange = {{-1, 1}, {4, -1}, {3, 4}, {7, 2}, {5, 0}, {2, 3}}

1. Primero lo haremos resolviendo el sistema de Vandermonde:

In[5]:=
```
n = Length[nodos];
A = Table[nodos[[i]] ^ (j - 1), {i, n}, {j, n}];
MatrixForm[A]
```

Out[7]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 1 & 7 & 49 & 343 & 2401 & 16807 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$$

In[8]:=
```
a = LinearSolve[A, valores];
p1[x_] := Sum[a[[i]] x^(i - 1), {i, n}];
Print["p1(x)  = ", p1[x] // Expand]
```

$$p1(x) = -\frac{659}{24} + \frac{7243\,x}{1440} + \frac{19387\,x^2}{960} - \frac{32059\,x^3}{2880} + \frac{1957\,x^4}{960} - \frac{71\,x^5}{576}$$

2. En segundo lugar, usando la fórmula de Lagrange:

In[11]:=
```
n = Length[nodos];
```

$$p2[x\_] := \sum_{i=1}^{n} \text{valores}[[i]] * \text{Product}\Big[\text{If}\big[j == i, 1, \qquad x - \text{nodos}[[j]]$$

$$\frac{}{2880} + \frac{1957\,x^4}{960} - \frac{71\,x^5}{576}$$

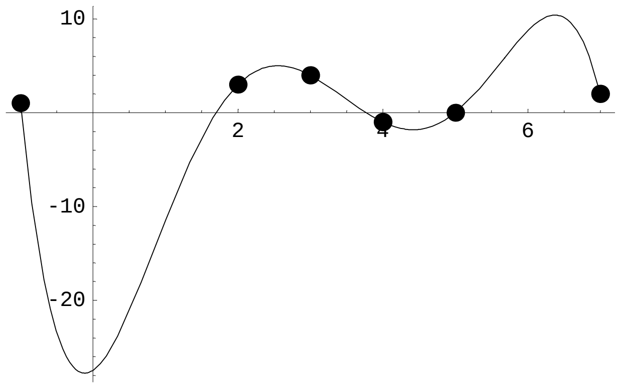
3. Y finalmente, usando el comando **InterpolatingPolynomial[datos,variable]**

In[14]:=
```
p3[x_] := InterpolatingPolynomial[datos, t] /. {t → x}
Print["p3(x)  = ", p3[x] // Expand]
```

$$p3(x) = -\frac{659}{24} + \frac{7243\,x}{1440} + \frac{19387\,x^2}{960} - \frac{32059\,x^3}{2880} + \frac{1957\,x^4}{960} - \frac{71\,x^5}{576}$$

4. Ahora dibujamos los datos y el polinomio de interpolación

```
In[16]:= ptos = ListPlot[datos, PlotStyle → {PointSize[0.03]}];
         poli = Plot[p3[x], {x, Min[nodos], Max[nodos]}];
         Show[poli, ptos]
```



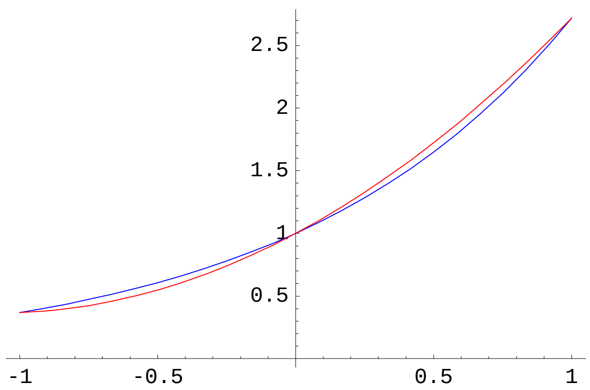
■ A partir de datos de una función:

```
In[19]:= Clear[nodos, valores, datos, p]
         f[x_] := E^ x;
         nodos = {-1, 0, 1};
         valores = f[nodos];
         datos = Transpose[{nodos, valores}];
         Print["datos de la función f(x) -> ", datos]
```

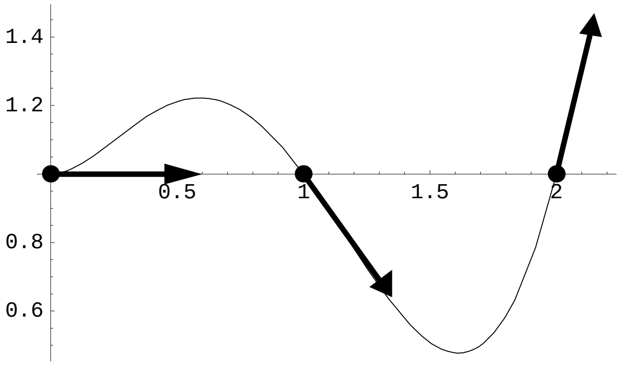
datos de la función f(x) -> $\{\{-1, \frac{1}{e}\}, \{0, 1\}, \{1, e\}\}$

```
In[25]:= p[x_] := InterpolatingPolynomial[datos, t] /. {t → x}

         Plot[{f[x], p[x]}, {x, Min[nodos], Max[nodos]},
           PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[1, 0, 0]}];
         Plot[{f[x], p[x]}, {x, Min[nodos] - 3, Max[nodos] + 1},
           PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[1, 0, 0]}];
```



-4 -3 -2 -2



Interpolación polinómica de Taylor

Lo haremos sobre los datos de la función Seno y sus 5 primeras derivadas en cero:

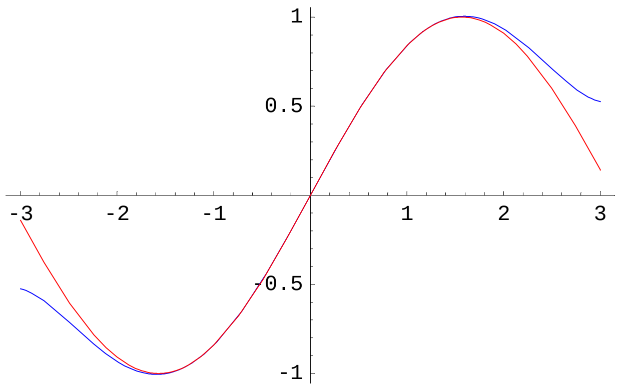
```
In[37]:= Clear[nodos, valores, datos, p]
         f[x_] := Sin[x];
         nodo = 0;
         valores = Table[D[f[x], {x, i}] /. {x → nodo}, {i, 0, 5}]
         datos = {{nodo, valores}};
         Print["datos tipo Taylor = ", datos]

Out[40]= {0, 1, 0, -1, 0, 1}

         datos tipo Taylor = {{0, {0, 1, 0, -1, 0, 1}}}
```

```
In[43]:= p[x_] := InterpolatingPolynomial[datos, t] /. {t → x}
         Print["p(x) = ", p[x] // Expand]
         Plot[{p[x], Sin[x]}, {x, -3, 3}, PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[1, 0, 0]}];
```

$$p(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$



Veamos que coincide con el polinomio de Taylor de grado 5 de la función Seno en el punto cero que calcularemos con un comando directo de Mathematica.

```
In[46]:= Series[Sin[x], {x, 0, 5}]
         Normal[Series[Sin[x], {x, 0, 5}]]
```

Out[46]= $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O[x]^6$

Out[47]= $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$

Ejercicios:

1. Aproxima el valor de Sen(1) y Sen(3) por el valor de su polinomio de interpolación:

A. De tipo Lagrange en los nodos $\{\frac{-\pi}{3}, \frac{-\pi}{4}, \frac{-\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\}$.
B. De tipo Hermite en los mismos nodos.
C. De tipo Taylor usando sus primeras 7 derivadas en el punto cero.
D. De tipo Hermite generalizado, usando 2 derivadas en los nodos anteriores.

Compara los resultados con el resultado exacto.

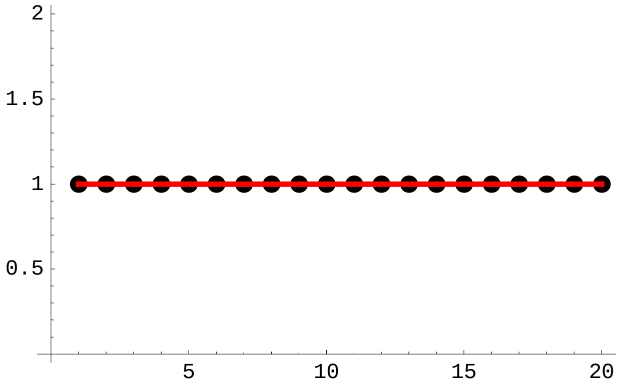
2. A. Calcula el polinomio de primer grado que en x=10 vale 13 y en x=15 toma el valor 12.
B. Calcula el polinomio de segundo grado que en x=10 vale 13, en x=15 vale 12 y en 14 vale 17.
C. Calcula el polinomio de tercer grado que vale 13 en x=10, en x=15 vale 12 y es tal que su derivada en x=10 vale 5 y en x=15 toma el valor -7.
D. Dibuja juntas y con diferente color las tres curvas obtenidas.

Errores PIPL

```
datos = Table[{i, 1}, {i, 20}];
Print["datos = ", MatrixForm[Transpose[datos]]]
p[x_] := InterpolatingPolynomial[datos, t] /. {t → x}
Print["polinomio interpolador: p(x)=", p[x]]
ptos = ListPlot[datos, PlotStyle → {PointSize[0.03]}];
poli = Plot[p[x], {x, 1, 20}, PlotStyle → {Thickness[.01], RGBColor[1, 0, 0]}];
Show[ptos, poli]
```

$$\text{datos} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

polinomio interpolador: $p(x) = 1$



- Graphics -

```
datos[[10, 2]] = 1.01;
Print["datos = ", MatrixForm[Transpose[datos]]]
p[x_] := InterpolatingPolynomial[datos, t] /. {t → x}
Print["polinomio interpolador: p(x)=", p[x] // Expand]
ptos = ListPlot[datos, PlotStyle → {PointSize[0.03]}];
poli = Plot[p[x], {x, 1, 20}, PlotStyle → {Thickness[.01], RGBColor[1, 0, 0]}];
Show[ptos, poli]
```

$$\text{datos} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1.01 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

polinomio interpolador: $p(x) = -1846.56 + 6462.28\,x - 9836.43\,x^2 + 8790.62\,x^3 - 5224.9\,x^4 + 2211.36\,x^5 - 695.2\,x^6 + 166.909\,x^7 - 31.1751\,x^8 + 4.58461\,x^9 - 0.534489\,x^{10} + 0.0495153\,x^{11} - 0.00363756\,x^{12} + 0.000210439\,x^{13} - 9.46274\times10^{-6}\,x^{14} + 3.23666\times10^{-7}\,x^{15} - 8.13096\times10^{-9}\,x^{16} + 1.41363\times10^{-10}\,x^{17} - 1.51881\times10^{-12}\,x^{18} + 7.59406\times10^{-15}\,x^{19}$