Universidad de Granada
Facultad de Ciencias
Dept. Matemática Aplicada

MÉTODOS NUMÉRICOS
Grupo A
Licenciatura en Matemáticas

Examen extraordinario de Septiembre

2-septiembre-2005

Duración: 2:30 h

Apellidos y Nombre	**Firma**
D.N.I.:	

Se considera la siguiente función polinómica:

$$\boxed{p(x) = x^4 + 2x^2 - 7x - 2}.$$

1. Para un un polinomio, $q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$, mónico de grado n, se define su *matriz compañera* como la siguiente matriz $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

de manera que el polinomio característico asociado a dicha matriz es precisamente $q(x)$.

a) Aplica el Teorema de los discos de Gerschgorin a la matriz compañera de $p(x)$ y localiza en el plano complejo todas las raíces de $p(x)$. Comprueba que el resultado es el mismo si lo hacemos aplicando directamente a $p(x)$ el Teorema de acotación de Sturm.

b) Separa todas las raíces reales de la derivada de $p(x)$ en intervalos de longitud uno mediante una sucesión de Sturm.

2. a) Demuestra que para cualquier aproximación inicial x_0 en el intervalo $[1, 8]$ el método de Newton–Raphson converge.

b) Aproxima la raíz positiva de $p(x)$ usando el método de Newton-Raphson a partir de la aproximación inicial $x_0 = 2$ deteniendo el proceso cuando la distancia entre dos iteraciones sucesivas sea menor que 10^{-4}.

3. a) Construye el polinomio (del grado adecuado para que el problema de interpolación sea unisolvente) que interpola a $p(x)$ en todas sus raíces reales.

b) Calcula la mejor aproximación uniforme de $p'(x)$ en $\mathbb{P}_1[x]$ en el intervalo $[0, 1]$.

4. a) Para aproximar $\int_0^2 p(x)\,dx$, construye una fórmula del tipo

$$\lambda_1 p(0) + \lambda_2 p'(2) + \lambda_3 p''(1) + \lambda_4(p'''(1) - p(2)).$$

b) Determina el grado de exactitud de dicha fórmula.

Cada ejercicio se valorará sobre 2.5 puntos sobre 10.

Solución:

1. a) La matriz compañera es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y los discos $B(0,2)$, $B(0,8)$, $B(0,3)$ y $B(0,1)$. Por lo tanto las raíces están en $B(0,8)$. Con Sturm: $\lambda = \max\limits_{0\le k<n}\left\{\dfrac{|a_k|}{|a_n|}\right\} + 1 = \max\{2,7,2,0\} + 1 = 8$ proporciona la misma acotación.

b) Sucesión de Sturm:

$$\begin{aligned} f_0 &= p' = 4x^3 + 4x - 7 \\ f_1 &= p'' = 12x^2 + 4 \\ f_2 &= -\frac{8}{3}x + 7 \\ f_3 &= -\frac{1387}{16} < 0 \end{aligned}$$

Secuencias de signos en varios puntos:

$$\begin{aligned} x = -8 &\qquad \{-1,1,1,-1\} \\ x = 8 &\qquad \{1,1,-1,-1\} \Rightarrow 1 \text{ raíz} \\ x = 0 &\qquad \{-1,1,1,-1\} \Rightarrow \text{está en } [0,8] \\ x = 4 &\qquad \{1,1,-1,-1\} \Rightarrow \text{está en } [0,4] \\ x = 2 &\qquad \{1,1,1,-1\} \Rightarrow \text{está en } [0,2] \\ x = 1 &\qquad \{1,1,1,-1\} \Rightarrow \text{está en } [0,1] \end{aligned}$$

$p'(x)$ tiene una una única raíz en el intervalo $[0,1]$.

2. a) Usamos el Teorema global de convergencia de N–R. Las hipótesis a verificar son:

H1: Regularidad; f es dos veces derivable por ser un polinomio

H2: Cambio de signo; $f(a)f(b) = f(1)f(8) = (-6) \times 4166 < 0$.

H3: Derivada distinta de 0; $f'(x) \neq 0$ en $[1,8]$. Usar 1.b) o bien H4 y que $p'(1) = 1 > 0$.

H4: f'' no cambia de signo; $f''(x) = 4 + 12x^2$ es siempre positiva.

H5: $\max\left\{\dfrac{|f(a)|}{|f'(a)|}, \dfrac{|f(b)|}{|f'(b)|}\right\} = \max\left\{\dfrac{|-6|}{|1|}, \dfrac{|4166|}{|2073|}\right\} = 6 < (8-1) = (b-a)$.

b) La función de punto fijo es: $g(x) = \frac{3x^4+2x^2+2}{4x^3+4x-7}$, y las aproximaciones:

$x_0 = 2$,

$x_1 = 1.7575$,

$x_2 = 1.692396$,

$x_3 = 1.687943$,

$x_4 = 1.687923$,

donde nos detenemos puesto que $|x_3 - x_4| < 10^{-4}$.

3. a) $\ddot{\smile}$ si buscas la respuesta es porque no has entendido la pregunta; vuelve a leerla.

El polinomio interpolador es el cero; es el único polinomio cuyo valor en ciertos nodos es **cero**, que es el **valor de p en cada una de sus raíces**. (Notamos que no hace falta saber cuáles son ni cuántas son, sólo saber que son las raíces de p).

b) Definimos $u(x) = p'(x) - (a\,x + b) = 4x^3 + (4-a)x - (7+b)$, y buscamos puntos críticos: $u'(x) = 12x^2 + 4 - a$. De los dos posibles puntos críticos de $u(x)$, uno es negativo (no nos vale) y el otro es: $x_0 = \sqrt{\dfrac{a-4}{12}}$. Como ha de estar en el intervalo $[0,1]$ tenemos que $4 \le a \le 16$.

Al interpolar en $\mathbb{P}_1[x]$ necesitamos $2 \times 1 + 1 = 3$ puntos donde se alcancen los máximos (con signos alternados) de u. Ya que sólo tenemos 3 candidatos $\{0,\, x_0,\, 1\}$, han de ser ellos. Buscamos a y b usando este hecho.

$$u(0) = u(1) \;\Rightarrow\; a = 8 \;\Rightarrow x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

y entonces:

$$u(0) = u(1/\sqrt{3}) \;\Rightarrow\; b = -7 - \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

4. a) Planteamos el sistema para $\{1, x, x^2, x^3\}$ para que sea exacta en $\mathbb{P}_3[x]$:

$$\begin{aligned}
p(x) = 1 \quad &\Rightarrow \quad \lambda_1 - \lambda_4 = 2,\\
p(x) = x \quad &\Rightarrow \quad \lambda_2 - 2\lambda_4 = 2,\\
p(x) = x^2 \quad &\Rightarrow \quad 4\lambda_4 + 2\lambda_3 - 4\lambda_4 = \frac{8}{3},\\
p(x) = x^3 \quad &\Rightarrow \quad 12\lambda_2 + 6\lambda_3 - 2\lambda_4 = 4,
\end{aligned}$$

y lo resolvemos por cualquier método:

$$\lambda_1 = \frac{8}{5}, \quad \lambda_2 = \frac{6}{5}, \quad \lambda_3 = \frac{-28}{15}, \quad \lambda_4 = \frac{-2}{5}.$$

De ahí: $\displaystyle\int_0^2 p(x)\,dx \approx \frac{1}{5}\left(8p(0) + 6p'(2) - \frac{28}{3}p''(1) - 2(p'''(1) - p(2))\right) = \frac{2}{15}.$

b) Calculamos para $p(x) = x^4$

$$\begin{aligned}
\text{integral aproximada:} \quad & \frac{64}{15},\\
\text{integral exacta:} \quad & \frac{32}{15},
\end{aligned}$$

de donde el grado de exactitud es sólo 3.