MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 04-05

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales I

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

a) Comprueba que A admite descomposición LU y calcula una.
b) Comprueba que B no admite descomposición LU.
c) Da una permutación de las filas de B que admita descomposición LU y calcúlala.
d) Calcula $k(A)$ y $k(B)$ con las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$

2. Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, aunque sea simétrica, no admite descomposición de Cholesky. ¿Será definida positiva? Calcula $x^t.A.x$ para el vector $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

3. Determina razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
a) La inversa de una matriz simétrica regular es simétrica regular.
b) La suma de matrices definidas positivas es una matriz definida positiva.
c) Si A admite una descomposición LU entonces es regular.
d) Toda matriz ortogonal admite una descomposición LU
e) De 2 matrices A y B sabemos que $A+B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y que $A-B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Entonces $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Mediante la descomposición QU de Householder resuelve el S.E.L.:

$$\begin{cases} 2x + y - z &= 1, \\ 2x + y + z &= 0, \\ x + y + z &= 4. \end{cases}$$

5. Utilizando la descomposición LU de Doolittle, resuelve $A.x = b$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

6. Dados x e y en $\mathbb{R}^n$ y $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ regular, Comprueba que la matriz $A + x.y^t$ es regular si y sólamente si $(1 + y^t.A^{-1}.x) \neq 0$, y que, en este caso

$$(A + x.y^t)^{-1} = A^{-1} - \frac{(A^{-1}.x).(y^t.A^{-1})}{1 + y^t.A^{-1}.x}$$