MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 04-05

Resolución de ecuaciones II

1.- En 1225 Leonardo de Pisa estudió la ecuación

$$p(x) = x^3 + 2x^2 + 10x - 20 = 0 \tag{1}$$

y obtuvo la raíz $x = 1.368808107$. No se sabe cómo encontró este valor, pero es un resultado notable para su época. En este ejercicio se pretende resolver la ecuación (1) usando varios métodos.

(i) Transformar (1) en una ecuación equivalente $x = g(x)$, dando dos posibles elecciones de $g(x)$, de forma que el método

$$x_{n+1} = g(x_n)\,, \quad n \geq 0\,,$$

sea convergente en un caso y divergente en el otro.

(ii) Usando el método convergente del apartado anterior, aproximar la raíz de (1) con precisión de 10^{-3}.

(iii) Aplicar a la ecuación (1) el método de Steffensen a partir de (ii).

(iv) Estudiar la aplicabilidad del teorema de convergencia global del método de Newton–Raphson a (1) y calcular, mediante dicho método, el valor de la raíz. Comparar el resultado obtenido con (ii) y comentarlo.

(v) Aplicar cinco iteraciones (hasta x_6) del método de la secante a (1) y comparar el resultado con (ii) y (iv).

(vi) Construir una sucesión de Sturm asociada a $p(x)$, localizar las raíces reales de (1) en intervalos disjuntos de amplitud uno y acotar las raíces complejas si las hay.

2.- Consideramos el polinomio $p(x) = x^3 + 5x - 4$. Se pide

(i) Mediante la teoría de Sturm, comprobar que $p(x)$ tiene una única raíz real y localizarla en un intervalo de amplitud unidad.

(ii) Demostrar que r es la raíz de $p(x)$ si y sólo si r es un punto fijo de la función

$$g(x) = \frac{4}{x^2 + 5} \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

(iii) Probar que el método iterativo asociado a la función g es convergente en el intervalo $[0, 1]$. Deducir el orden de convergencia de dicho método.

(iv) Calcular una aproximación de r con dos decimales exactos usando el método de (iii) y el de Newton–Raphson (tomar $x_0 = 0$). Comparar los resultados.

3.- Separar las raíces reales de la ecuación

$$x^3 - x^2 - x - 1 = 0$$

en intervalos de amplitud unidad mediante la teoría de Sturm.

4.- Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) Sea $f(x)$ una función. Entonces, si $f(a)f(b) < 0$, por el teorema de Bolzano, existe al menos una raiz en el intervalo $[a, b]$.

(ii) Si $g'(x) < 1$, $\forall x \in [a, b]$, entonces el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$, $x_0 \in [a, b]$, converge.

(iii) ¿Existe una función $g(x)$ tal que los primeros términos de la sucesión $\{x_n\}$, generada por el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ sean $\{1, 1.5, 2, 1.5, 1, 0, 3, \ldots\}$?

(iv) Si un polinomio tiene todos sus coeficientes positivos, entonces no puede tener raices negativas.

(v) Si un polinomio de grado 7 tiene todas sus raices simples entonces la sucesión de Sturm asociada al polinomio tiene 8 funciones.

(vi) Sea $\{f_0, f_1, f_2, \ldots, f_m\}$ una sucesión de Sturm. Entonces, si tomamos m números positivos $\{a_i > 0, i = 0, \ldots, m\}$, la sucesión $\{a_0 f_0, a_1 f_1, a_2 f_2, \ldots, a_m f_m\}$ también es de Sturm.

(vii) Si en la construcción de la sucesión de Sturm asociada a un polinomio $p(x)$ de grado $2n$ ocurre que el último resto no nulo obtenido $(-f_m(x))$ es un polinomio de grado n con todas sus raices simples, entonces todas las raices de $p(x)$ son raices de $f_m(x)$.

5.- Demuestre que el método de Steffensen aplicado a la sucesión $x_{n+1} = x_n + f(x_n)$ para resolver la ecuación $f(x) = 0$, conduce al método

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(f(x_n))^2}{f(x + f(x)) - f(x)}.$$