MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 04-05

Resolución de ecuaciones I

1.- Utiliza el método de bisección para calcular con una precisión de 10^{-2} las soluciones de $x^3 - 7x^2 + 14x - 6 = 0$ en los intervalos $[0,1]$, $[1, 3.2]$ y $[3.2, 4]$.

2.- Utiliza el método de bisección para aproximar $\sqrt{3}$ con un error absoluto máximo de 10^{-4}. (Ayuda: considera $f(x) = x^2 - 3$).

3.- Halla una cota del número de iteraciones del método de bisección necesarias para aproximar la solución de $x^3 + x - 4 = 0$ que está en el intervalo $[1, 4]$ con 3 cifras decimales exactas y calcula dicha aproximación.

4.- La función $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ sabemos que tiene ceros en cada número entero. Prueba que cuando $-1 < a < 0$ y $2 < b < 3$ el método de bisección sobre $[a, b]$ converge a:

a) 0, si $a + b < 2$,
b) 2, si $a + b > 2$,
c) 1, si $a + b = 2$.

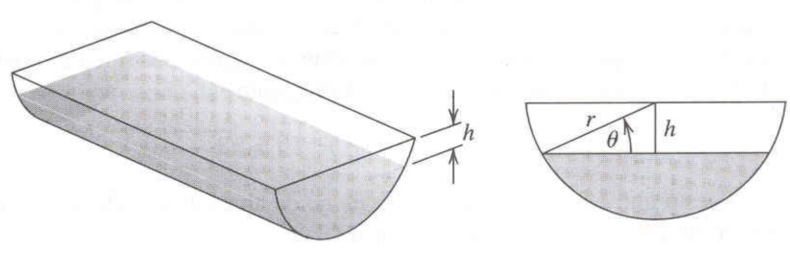
5.- Dada $f(x) = -x^3 - \cos(x)$ y dados $x_0 = -1$ y $x_1 = 0$, calcula tres aproximaciones sucesivas de la raiz de f en $[-1, 0]$ usando tanto el método de la secante como el de *regula falsi*.

6.- Aproxima, con un error inferior a 10^{-4}, el valor de x para el cual se obtiene el punto de la gráfica de $y = x^2$ que está más cerca del punto $(1, 0)$. (Ayuda: minimiza la función $d(x)^2$ tomando $d(x)$ la distancia de cada punto (x, x^2) de la gráfica al punto $(1, 0)$.

7.- El perfil de un abrevadero de longitud L es un semicírculo de radio r (ver figura). Cuando está lleno hasta una distancia h del borde superior el volumen V de agua que contiene viene dado por

$$V = L\left(\frac{\pi r^2}{2} - r^2 \operatorname{arcsen}\left(\frac{h}{r}\right) - h\sqrt{r^2 - h^2}\right)$$

Si $L = 10m$, $r = 1m$ y $V = 12.4m^3$ determina la profundidad de agua que hay en el abrevadero con un error máximo de $1cm$.

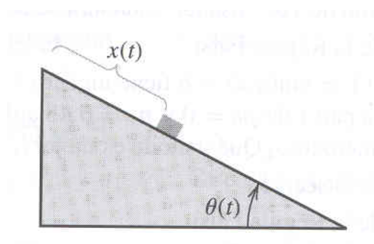


8.- Una partícula parte del reposo y de desliza por un plano inclinado cuyo ángulo de inclinación θ cambia con respecto al tiempo t con velocidad constante ω, es decir $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$.

Sabemos que después de t segundos la partícula ha recorrido una distancia $x = x(t)$ dada por

$$x(t) = \frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} - \text{sen }(\omega t)\right)$$

donde g es la fuerza de la gravedad que suponemos constante e igual a $9.8m/s^2$. Si la partícula recorre $1.7m$ en 1 segundo, determina con una precisión de 10^{-5} la velocidad ω.



9.- Usa el método de Newton-Raphson para hallar las soluciones de los siguientes problemas con una precisión de 10^{-4}.

a) $x^3 - 2x^2 - 5 = 0$, en $[1, 4]$,

b) $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$, en $[-3, -2]$,

c) $x - \cos(x) = 0$, en $[0, \frac{\pi}{2}]$,

d) $x - 0.8 - 0.2\text{sen }(x) = 0$, en $[0, \frac{\pi}{2}]$.

10.- El capital A acumulado en una cuenta de ahorro en la que se ingresa periódicamente una cantidad P viene dado por la fórmula $A = \dfrac{P}{i}\big((1+i)^n - 1\big)$, donde i es el interés en cada periodo y n el número de periodos transcurridos.

Un empresario desearía jubilarse dentro de 20 años con un capital acumulado de 750.000 Eur haciendo depósitos mensuales de 1.500 Eur, ¿cuál es el interés mínimo que debe tener la cuenta de ahorro en la que invierta sus ahorros?

11.- ¿Qué condiciones ha de cumplir el parámetro α para garantizar la convergencia lineal del método iterativo $x_{n+1} = x_n - \alpha f(x_n)$ hacia un cero de $f(x)$ con x_0 apropiado?.

12.- Se desea obtener un método iterativo con convergencia local, al menos cúbica, para aproximar $\sqrt{k}$ con $k > 0$.

(a) Probar que los siguientes métodos de iteración de punto fijo (con x_0 apropiado)

(i) $x_{n+1} = g_1(x_n) = \frac{x_n^2+k}{2x_n}$

(ii) $x_{n+1} = g_2(x_n) = \frac{x(3k-x^2)}{2k}$

tienen orden de convergencia local 2.

(b) ¿Existen constantes α y β para las que el método

$$x_{n+1} = \alpha g_1(x_n) + \beta g_2(x_n)\,, \quad n \geq 0\,,$$

tenga orden de convergencia local 3?. ¿Es útil el método obtenido?.

(c) Aplicar los resultados anteriores para calcular $\sqrt{7}$ con precisión de 10^{-3}.

13.- Se desean calcular por iteración las raíces positivas de la ecuación $x+\log(x)=0$. Para ello, se proponen los métodos siguientes:

(i) $x_{n+1}=-\log(x_n)$

(ii) $x_{n+1}=e^{-x_n}$

(iii) $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+e^{-x_n})$

(a) ¿Hay alguno de ellos cuyo uso no sea aconsejable?

(b) ¿Cuál es el más adecuado de los tres?

(c) Proporcionar alguna otra fórmula mejor que las anteriores.

14.- Para encontrar la raíz cuadrada positiva de $a>0$ se utiliza el método de Newton–Raphson aplicado a $f(x)=x^2-a$. Suponiendo que $x_0>0$ y $x_0\neq\sqrt{a}$, deducir los siguientes resultados:

(a) $x_{n+1}>\sqrt{a}\ \ \forall n\geq 1$.

(b) $x_n>x_{n+1}\ \ \forall n\geq 1$.

(c) Si el error absoluto es $e_n=x_n-\sqrt{a}$, entonces $e_{n+1}=\frac{e_n^2}{2x_n}\ \ \forall n\geq 0$.

(d) Si el error relativo $E_n=\frac{x_n-\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$, entonces $E_{n+1}=\frac{\sqrt{a}}{2x_n}E_n^2\ \ \forall n\geq 0$.

(e) Si $x_0>\sqrt{a}$ y $|E_0|\leq 0.1$, proporcionar una cota de $|E_4|$.

15.- Para calcular $\sqrt{3}$ se propone el método

$$x_{n+1}=\frac{2x_n^3+\alpha}{\beta x_n^2-3}\,.$$

(a) Encontrar α y β para que la convergencia local sea al menos cuadrática. ¿Hay convergencia cúbica en este caso?

(b) Se considera el método de Newton–Raphson para $f(x)=x^2-3$. ¿Convergerá más rápidamente que el método anterior?

(c) Tomando $x_0=2$ y operando con seis cifras decimales, calcular $\sqrt{3}$ con cuatro cifras decimales exactas aplicando los dos métodos anteriores. Comparar con lo observado en (b).

(d) Si aplicamos el método de bisección a la ecuación $x^2-3=0$ en $[1,2]$, ¿cuántas iteraciones serán necesarias para alcanzar la misma precisión que en el apartado (c)?