MÉTODOS NUMÉRICOS
Curso 04-05

Interpolación (Polinómica)

1. Estudia el siguiente problema de interpolación consistente en buscar un polinomio $p \in \mathbb{P}_2[x]$ que cumpla:

$$p(x_0) = y_0, \qquad p(x_1) = y_1, \qquad p'(x_2) = y_2.$$

Escribe la fórmula de Lagrange para el caso: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$.

2. Discute si los siguientes problemas de interpolación son unisolventes en $\mathbb{P}_3[x]$:

a) $p(x_i) = y_i$, $p''(x_i) = y_i''$, $i = 1, 2$.

b) $p(0) = a$, $p(1) = b$, $p'(1) = c$, $p''(2) = d$.

c) $p(0) = a$, $p'(0) = b$, $p'(2) = c$, $p''(1) = d$.

3. Estudia la existencia y unicidad de solución de cada problemas de interpolación:

a) $\boxed{\begin{array}{l}\text{Buscar } p \in V := \{q \in \mathbb{P}_3[x] : q'(0) = 0\} \\ \text{conocidos: } p(0),\ p(1) \text{ y } \int_0^1 p(x)\,dx.\end{array}}$

b) $\boxed{\begin{array}{l}\text{Buscar } p \in \mathbb{P}_2[x] \\ \text{conocidos: } p(0),\ p(1),\ p(2) \text{ y } \int_0^2 p(x)\,dx.\end{array}}$

c) $\boxed{\begin{array}{l}\text{Buscar } p \in V := \{q \in \mathbb{P}_3[x] : q''(0) = 0\} \\ \text{conocidos: } p(x_1),\ p'(x_2) \text{ y } p''(x_3).\end{array}}$

d) $\boxed{\begin{array}{l}\text{Buscar } p \in \mathbb{P}_2[x] \\ \text{conocidos: } p(x_1),\ p'(x_2) \text{ y } p''(x_3).\end{array}}$

4. Se trata de estudiar la existencia y unicidad de una función $p(x)$ del espacio V generado por las funciones $\{g_0(x), g_1(x), ..., g_n(x)\}$ que interpole a una función dada $f(x)$ dada en los nodos $x_0, x_1, ..., x_n$, es decir, que cumpla:

$$p(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, ..., n, \quad \text{con } f \text{ dada y } x_i \in [a, b] \text{ distintos.}$$

a) Demuestra que si ninguna combinación lineal $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i\, g_i(x)$ de los $g_i(x)$ se anula en más de n puntos del intervalo $[a, b]$ (salvo en el caso trivial en que todos los λ_i sean cero), entonces el problema anterior es unisolvente.

b) Relaciona este hecho con el caso particular de $V = \mathbb{P}_n[x]$.

c) Basándote en el resultado anterior, comprueba que la interpolación mediante combinaciones de las funciones $\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x), \operatorname{sen}(2x), \cos(2x), ..., \operatorname{sen}(nx), \cos(nx)\}$ en $2n+1$ puntos del intervalo $]-\pi, \pi]$ tiene solución única.

5. Calcula mediante la fórmula de Lagrange una cúbica que pase por los puntos $(-1, 2)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$ y $(2, 0)$. Repite el cálculo pero usando la fórmula de Newton.

6. Consideramos el problema de interpolación siguiente:

$$\boxed{\text{Buscar } p \in V := \{q \in \mathbb{P}_3[x] : q''(1) = 0\} \text{ tal que: } \begin{cases} p(x_1) = y_1, \\ p(x_2) = y_2 \\ p(x_3) = y_3. \end{cases}}$$

a) Da una base cualquiera de V y estudia la unisolvencia para $x_i = i$.

b) Halla la base de Lagrange asociada a los nodos del apartado anterior.

c) Caracteriza los $\{x_1, x_2, x_3\}$ para los que no haya existencia o unicidad.

7. Calcula las bases de Lagrange y de Newton asociadas a los siguientes problemas de interpolación:

a)

x	-2	0	1
$f(x)$	0	1	1

b)

x	1	2	0	3
$f(x)$	3	2	-4	5

c)

x	3	7	1	2
$f(x)$	10	146	2	1

d) Resuélvelos.

8. La ecuación $x - 9^{-x} = 0$ tiene una solución en $[0, 1]$ (aplíquese Bolzano). Halla el polinomio que interpola a $f(x) = x - 9^{-x}$ en los nodos 0, 0.5 y 1. Iguala a cero el polinomio obtenido y resuelve dicha ecuación; observa que la solución calculada se puede considerar como una aproximación de la solución de la ecuación original ($x = 0.408004406...$).

9. a) Construye la tabla de diferencias divididas de la función $f(x) = x^3$ en los puntos $\{0, 1, 3, 4\}$ y, a partir de ellas, escribe el polinomio de interpolación.

b) Demuestra que si $f(x)$ es un polinomio de grado menor o igual a n, entonces $f[x_0, x]$ es un polinomio de grado menor o igual a $(n - 1)$.

10. Calcula la tabla de diferencias divididas con argumentos repetidos y el polinomio de interpolación en $\mathbb{P}_4[x]$ para los datos:

x	0	1	2
$f(x)$	2	-4	44
$f'(x)$	-9	4	

11. a) Evalúa en $x = 1$, por los métodos de Aitken y de Neville, el polinomio de interpolación de una función f que verifica $f(-1) = 1$, $f(0) = 1$ y $f(3) = 27$.

b) Aproxima $\sqrt{5}$ usando los métodos de Aitken y de Neville con los datos de la función $f(x) = 5^x$ en los nodos: $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$. ¿Cuál crees que es más apropiado?