3er CONTROL de PRÁCTICAS(*Mathematica*)
CURSO 2004/05
ÁLGEBRALINEAL 14/abril/05
ARQUITECTURA TÉCNICA

Ejercicio 1.

Dada la aplicación lineal : $f(x, y) = (2x + 2y, x + y, x + y)$,

a. Calcula la matriz respecto de las bases canónicas.
b. Calcula la matriz respecto de la base canónica en y la base
$B = \{(1, -1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 0)\}$ en el espacio de llegada.
c. Calcula una base del núcleo y otra de la imagen.

Sol.: En este caso la matriz de f es inmediata **mf = {{2, 2}, {1, 1}, {1, 1}};**

aunque podemos hacerla definiendo f:

In[1]:=
```
f[x_, y_] := {2 x + 2 y, x + y, x + y};
mf = Transpose[{f[1, 0], f[0, 1]}]
```

Out[2]=
```
{{2, 2}, {1, 1}, {1, 1}}
```

Contruimos la matriz de cambio de base y la nueva matriz de f:

In[3]:=
```
cambio = Transpose[{{1, -1, 0}, {0, 0, 1}, {1, 1, 0}}];
Inverse[cambio].mf
```

Out[4]= $\left\{\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \{1, 1\}, \left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\}\right\}$

Finalmente calculamos las bases pedidas.

In[5]:=
```
NullSpace[mf]
```

Out[5]=
```
{{-1, 1}}
```

In[6]:=
```
RowReduce[Transpose[mf]]
```

Out[6]= $\left\{\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}, \{0, 0, 0\}\right\}$

Por lo que una base del Núcleo es $\{(-1,1)\}$y una de la imagen $\{(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$

Ejercicio 2.

a. Calcula la matriz (respecto de la base canónica)
de la simetría en respecto de la recta de ecuación : $x - 8y = 0$.
b. Calcula la matriz (respecto de la base canónica) de la
rotación de ángulo $\pi/6$ en torno a la recta de ecuaciones :

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}.$$

Para la simetría construimos la base adecuada y la matriz respecto de esta base.

A simple vista podemos ver una base formada por el vector (8,1) de la recta y el vector (−1,8)ortogonal.

In[7]:=
```
cambio = Transpose[{{8, 1}, {1, 8}}];
sim = {{1, 0}, {0, -1}};
```

Ya tenemos la matriz de cambio de base **cambio** y la matriz de la simetría **sim** con respecto a la base dada. Ahora hacemos el cambio y concluimos.

In[9]:=
```
sim2 = cambio.sim.Inverse[cambio]
```

Out[9]= $\left\{\left\{\frac{65}{63}, -\frac{16}{63}\right\}, \left\{\frac{16}{63}, -\frac{65}{63}\right\}\right\}$

Para el giro procedemos a partir de un vector del eje de giro, u={1,0,1} que deducimos directamente de las ecuaciones de la recta.

construimos ahora la base completa (con vectores ortonormales en el plano ortogonal a la recta):

In[10]:=
```
u = {1, 0, 1};
{v, w} = NullSpace[{u}]
```

Out[11]= {{-1, 0, 1}, {0, 1, 0}}

Observamos que en este caso v y w ya son ortogonales, y que w tiene norma 1, por lo que basta con normalizar v.

In[12]:=
```
v = v / Sqrt[v.v]
```

Out[12]= $\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

Construimos la matriz de cambio de base y la matriz del giro respecto a esta base:

In[13]:=
```
cambio = Transpose[{u, v, w}];
giro =
  {{1, 0, 0}, {0, Cos[Pi / 6], -Sin[Pi / 6]}, {0, Sin[Pi / 6], Cos[Pi / 6]}};
```

Y cambiamos de base

In[15]:=
```
giro2 = cambio.giro.Inverse[cambio];
giro2 // MatrixForm
```

Out[16]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}$$