Universidad de Granada
Facultad de Ciencias
Dept. Matemática Aplicada

MÉTODOS NUMÉRICOS
Grupo A
Licenciatura en Matemáticas

3ª prueba de evaluación continua

14-feb-05

Interpolación (1ª parte)

Apellidos y Nombre	**Firma**
D.N.I.:	

A. Justifica **razonadamente** la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

1. Los polinomios $p_1(x) = 1 - x^2$ y $p_2(x) = (x-1)^2$ (distintos pero del mismo grado) interpolan a la función $f(x) = e^x(1-x)$ en los nodos $x = 0$ y $x = 1$.
2. Dados n nodos $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ cualesquiera y distintos y n valores $\{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ cualesquiera (siendo n un número natural arbitrario), existe una única función de la forma
$$f(x) = e^{a_0 x} + e^{a_1 x} + \ldots + e^{a_n x}, \text{ con } a_i \in \mathbb{R},$$
que verifica $f(x_i) = y_i$ para cada $i = 0, 1, \ldots, n$.
3. La siguiente tabla de diferencias divididas con argumentos repetidos (incompleta) corresponde al polinomio de interpolación $p(x) = x^4 - x - 1$:

x_i	y_i					
0	-1					
0			1			
		0				
1						
				1		0
1						
				0		
-1	1		2			
		-5				
-1	1					

4. Si $f(x) = 2x^4 - 1$, entonces $f[-2, -1, 0, 1, 2] = 0$.
5. Si en el problema de interpolación de Lagrange todos los valores son positivos, entonces el polinomio de interpolación también es positivo (es decir, $p(x) \geq 0$ para cualquier x).
6. Si $f(x) \in \mathbb{P}_2[x]$, entonces, $f[a, x] \in \mathbb{P}_1[x]$ para cualquier valor de a.

B. Ejercicio. Una empresa de control de calidad está estudiando la cantidad en agua de un cierto mineral y han realizado las siguientes mediciones:

Hectolitros de agua	1	1.5	2	2.5
Cantidad de mineral en miligramos	32	41	48	53

Estima cuántos miligramos de mineral podrán encontrarse en 1.6 hectolitros de agua; para ello haz la tabla de diferencias divididas asociada a estos datos y calcula el polinomio de interpolación mediante la fórmula de Newton.

Navegando por internet descubren que otra empresa hizo un estudio similar, encontrando 59 miligramos del mineral en 3 hectolitros de agua. Calcula el nuevo polinomio de interpolación.

Puntuación: **A**: 1,2 puntos cada apartado.
B: 2,8 puntos.

Corrección

A. Verdadero o falso:

1. **Verdadero**; porque ambos polinomios toman en $x = 0$ y $x = 1$ los mismos valores respectivos que f. Por cierto, aunque son distintos, no contradicen la unisolvencia, que se cumple en $\mathbb{P}_1[x]$, pero no necesariamente en $\mathbb{P}_2[x]$.

2. **Falso**; porque la función f, al ser suma de exponenciales, es siempre positiva, $f > 0$; por lo tanto, en cuanto uno de los y_i sea negativo, f no puede tomar ese valor.

3. **Verdadero**; la tabla se puede completar (aunque no es necesario, la última fila ya proporciona el polinomio de interpolación) obteniendo:

x_i	y_i					
0	-1	-1	1	2	1	0
0	-1	0	3	1	1	
1	-1	3	2	0		
1	-1	-1	2			
-1	1	-5				
-1	1					

de donde: $p(x) = (-1) + (-1)x + 1x^2 + 2x^2(x-1) + 1x^2(x-1)^2 = x^4 - x - 1$.

4. **Falso**; porque:
-bien usamos que $f[-2,-1,0,1,2] = f^{(4}(\xi)/4!$ y en este caso la derivada cuarta no depende de ξ y se puede calcular $f^{(4}(\xi)/4! = 2$;
-bien usamos que como f es un polinomio de grado 4, el polinomio que lo interpola en 5 puntos distintos es (por unicidad) el propio f, y como $f[-2,-1,0,1,2]$ es el coeficiente lider del polinomio de interpolación, y por lo tanto de f, es 2 y no 0;
-bien se calcula la tabla DD y se obtiene $f[-2,-1,0,1,2] = 2$.

5. **Falso**; basta dar un ejemplo en el que no ocurra. Por ejemplo, $p(x) = 1 + x$ es el polinomio de interpolación del PIPL $\begin{array}{c|c|c} x & 1 & 2 \\ \hline y & 2 & 3 \end{array}$ pero toma valores negativos para $x < (-1)$.

6. **Verdadero**; porque como

$$f[a,x] = \frac{f[x]-f[a]}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a},$$

y $f(x) - f(a)$ es un polinomio que se anula (obviamente) en $x = a$, entonces es divisible por $(x-a)$ y el cociente es un polinomio de un grado menos.

B. Ejercicio. Hacemos la tabla de DD:

x_i	y_i			
1	32	18	-4	0
1.5	41	14	-4	
2	48	10		
2.5	53			

$\Rightarrow p_3(x) = -4x^2 + 28x + 8.$

Evaluamos y obtenemos $p_3(1.6) = 42.56$ miligramos de mineral.

Para un dato más usamos $p_4(x) = p_3(x) + A_4(x-1)(x-1.5)(x-2)(x-2.5)$ siendo la cuarta diferencia dividida: $A_4 = \dfrac{59 - p_3(3)}{(3-1)(3-1.5)(3-2)(3-2.5)} = 2.$