Universidad de Granada
Facultad de Ciencias
Dept. Matemática Aplicada

MÉTODOS NUMÉRICOS
Grupo A
Licenciatura en Matemáticas

1ª prueba de evaluación continua

18-nov-04

Resolución de ecuaciones

Apellidos y Nombre	Firma
D.N.I.:	

1. a) Dadas las siguientes ecuaciones y los siguientes métodos de resolución de punto fijo:

$$
\begin{array}{ll}
a)\ e^x + x = 0, & 1)\ x_{n+1} = e^{x_n/2} \\
b)\ e^x - x^2 = 0, & 2)\ x_{n+1} = (x_n - 1) - \dfrac{x_n - 1}{e^{x_n} + 1} \\
c)\ e^x - 1 = 0, & 3)\ x_{n+1} = \dfrac{x_n\, e^{x_n} - e^{x_n} - x_n^2}{e^{x_n} - 2x_n} \\
 & 4)\ x_{n+1} = 1 - e^{x_n} + x_n
\end{array}
$$

determina razonadamente qué método o métodos (con x_0 elegido adecuadamente en cada caso para que haya convergencia) resuelve cada ecuación.

b) Independientemente del apartado anterior, determina si los métodos 2) y 4) son localmente convergentes.

2. Separa todas las raíces reales de la ecuación

$$2x^3 + x^2 - 5x - 3 = 0$$

en intervalos de amplitud unidad mediante la teoría de Sturm.

Esquema de la solución.

1. a)
1) Las funciones $y = x$ e $y = e^{x/2}$ no tienen puntos de corte; por ello el método $x_{n+1} = e^{x_n/2}$ no converge nunca, no tiene punto fijo, no aproxima la solución de ninguno.
2) Es el resultado de aplicar Newton-Raphson a a).
3) Es el resultado de aplicar Newton-Raphson a b).
4) resuelve $s = 1 - e^s + s \Leftrightarrow e^s - 1 = 0$, y por lo tanto resuelve c).

1. b)

2) es localmente convergente puesto que es la g de Newton-Raphson asociada a la ecuación a) y por lo tanto $g'(s) = 0$. En cualquier caso $g'(x) = e^x \dfrac{e^x + x}{e^x + 1}$ y como resuelve $e^s + s = 0$, entonces verifica $|g'(s)| = e^s \dfrac{|e^s + s|}{e^s + 1} = 0 < 1$.
Para 4) no hay más que derivar $g(x) = 1 - e^x + x$. Se tiene $g'(x) = -e^x + 1$. Como s resuelve $e^s - 1 = 0$ obtenemos $g'(s) = 0$.

2.
La sucesión de Sturm asociada es:

$f_0(x) = p(x) = 2x^3 + x^2 - 5x - 3$,

$f_1(x) = p'(x) = 6x^2 + 2x - 5$,

$f_2(x) = -\{$ resto de dividir f_0 entre $f_1\} = \dfrac{1}{18}(62x + 49)$,

$f_3(x) = -\{$ resto de dividir f_1 entre $f_2\} = \dfrac{5455}{1922} > 0$.

Como $\lambda = \max\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{2}, \dfrac{3}{2}\right\} = \dfrac{5}{2}$ las raíces reales están en $[-7/2, 7/2]$.

Secuencia de signos:

En $x = -7/2$: $\{-,+,-,+\}$ 3 cambios
en $x = 7/2$: $\{+,+,+,+\}$ 0 cambios (3 raíces en total)
en $x = 0$: $\{-,-,+,+\}$ 1 cambios (2 negativas y una positiva)
en $x = -2$: $\{-,+,-,+\}$ 3 cambios
en $x = -1$: $\{+,-,-,+\}$ 2 cambios (una entre -2 y -1 y otra entre -1 y 0)
en $x = 1$: $\{-,+,+,+\}$ 1 cambios (ninguna entre 0 y 1)
en $x = 2$: $\{+,+,+,+\}$ 0 cambios (una entre 1 y 2)

De todo ello: 1 raíz en $[-2,-1]$, otra en $[-1,0]$ y otra en $[1,2]$.

VER EN LA WEB LOS ERRORES MÁS COMETIDOS.