T8. ELECTROMAGNETISMO Y RELATIVIDAD ESPECIAL

Introducción

- Fenómenos eléctricos

  Antigua Grecia: producidos al frotar ámbar (elektrum)

  s. XVIII: cargas positivas y negativas [Franklin] que se atraen/repelen $\propto r^{-2}$ [Coulomb]

- Fenómenos magnéticos

  Propiedades de la magnetita (imán natural), orientación norte-sur (brújula)

… eran meras curiosidades hasta el principios del s. XIX cuando se descubre que:

– Cargas en movimiento (corrientes) producen efectos magnéticos [Oersted, Ampère]

– Imanes en movimiento producen corrientes eléctricas [Faraday]

$\Rightarrow$ motor eléctrico y desarrollo de la tecnología moderna

- Maxwell (1864):

  – Sintetizó en cuatro ecuaciones todos los resultados conocidos

  – Predijo la existencia de las ondas electromagnéticas y su velocidad

  $\Rightarrow$ la luz es una onda electromagnética en el rango visible

  … Sus ecuaciones son invariantes Lorentz: no se comprendía …

- Einstein: *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik **17** (1905) 891-921
  - Principio de relatividad (primer postulado):
    las leyes de electricidad y magnetismo son las mismas para cualquier obervador inercial
    Ejemplo de espiras e imanes: sólo importa el movimiento relativo
    $\Rightarrow$ electricidad y magnetismo son dos manifestaciones del mismo fenómeno
  - Constancia de la velocidad de la luz en el vacío (segundo postulado):
    consecuencia de la invariancia Lorentz de las ecuaciones de Maxwell
    (el segundo postulado equivale a exigir invariancia Lorentz)

Ecuaciones de Maxwell

medio lineal e isótropo, sistema MKSA

$$
\begin{array}{llrcl}
(1) & (\text{divergencia de } \vec{E}) & \nabla \cdot \vec{E} & = & \dfrac{\rho}{\epsilon} \\
(2) & (\text{divergencia de } \vec{B}) & \nabla \cdot \vec{B} & = & 0 \\
(3) & (\text{rotacional de } \vec{E}) & \nabla \times \vec{E} & = & -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
(4) & (\text{rotacional de } \vec{B}) & \nabla \times \vec{B} & = & \mu \vec{\jmath} + \mu\epsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{array}
$$

Campos eléctrico y magnético

$\vec{E}$ y $\vec{B}$

donde	ρ	$\equiv$	densidad de carga	[C m^{-3}]	(1 C $\equiv$ Coulombio $=$ 1 A s)
	$\vec{\jmath}$	$\equiv$	desidad de corriente	[A m^{-2}]	
	$\vec{E}$	$\equiv$	campo eléctrico	[V m^{-1}]	
	$\vec{B}$	$\equiv$	inducción magnética	[T]	(1 T $\equiv$ Tesla $=$ 1 N A^{-1} m^{-1})
	ϵ	$\equiv$	permitividad eléctrica	[F m^{-1}]	(1 F $\equiv$ Faradio $=$ 1 C V^{-1})
	μ	$\equiv$	permeabilidad magnética	[N A^{-2}]	

y $\quad \nabla = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right) \qquad \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z}$

Concepto de campo

- La idea de campo sustituye al concepto de acción a distancia
- Parece una complicación pero constituye una gran simplificación (aplicable también a las otras interacciones)

Según Einstein:

el cambio en la concepción de la realidad más profundo y fructífero desde los tiempos de Newton

Campo eléctrico y fuerzas eléctricas: (1)

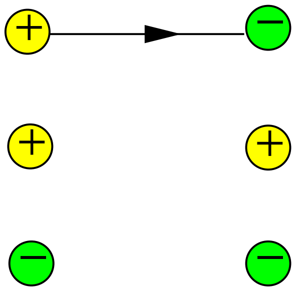
(1) $\nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon} \Rightarrow$ Ley de Gauss para el campo eléctrico   usando teorema de la divergencia: $\int_V \nabla \cdot \vec{A}\, dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$

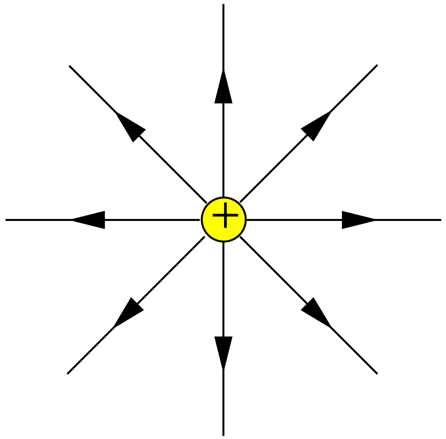
las líneas de campo eléctrico son divergentes

se atraen

se repelen

se repelen





$$\boxed{\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho\, dV}$$

El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga total encerrada

- Relación con la fuerza eléctrica (ley de Coulomb):

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$E\ 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = qE = k_C \frac{Qq}{r^2}}$$

Campo magnético y fuerzas magnéticas: (2)

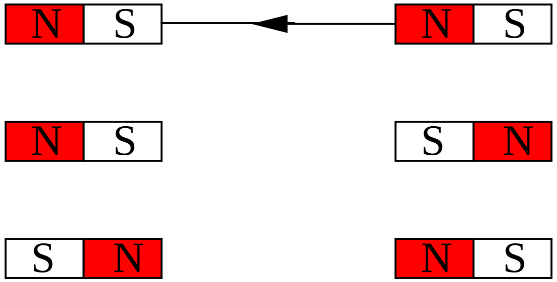
(2) $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \Rightarrow$ Ley de Gauss para el campo magnético   usando teorema de la divergencia: $\int_V \nabla \cdot \vec{A}\, dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$

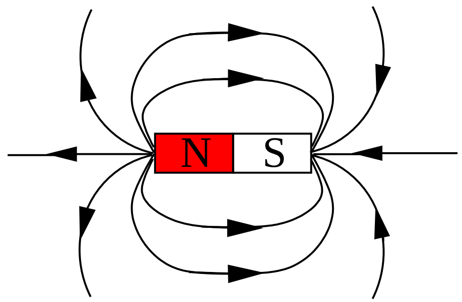
líneas de campo magnético no son divergentes

se atraen

se repelen

se repelen



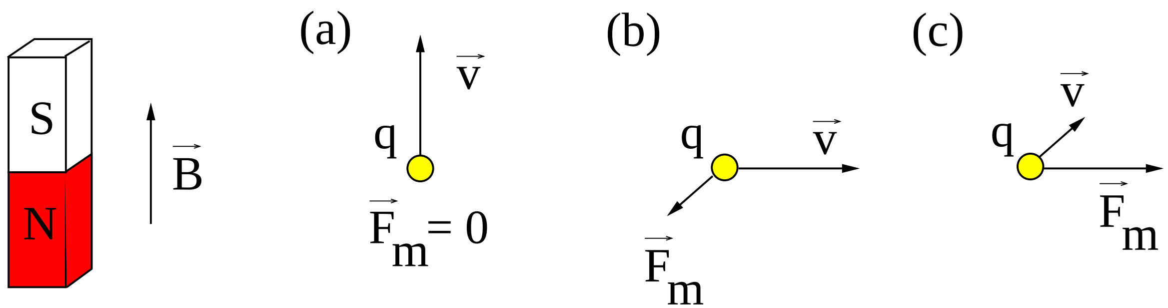


$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

El flujo magnético a través de una superficie cerrada es cero

- Relación con la fuerza magnética (ley de Lorentz)

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + \vec{F}_m, \quad \vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B})} \qquad (\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{F}_m = 0)$$



Relación entre campos eléctricos y magnéticos: (3) y (4)

- No sólo una carga (imán) es capaz de crear un campo eléctrico (magnético)

(3) $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$ Ley de inducción de Faraday

usando teorema de Stokes: $\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$

$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}}$$

La variación del flujo del campo magnético a través de una espira induce una corriente

$\Rightarrow$ principio del generador eléctrico

(4) $\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{\jmath} + \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$ Ley de Ampère

usando teorema de Stokes: $\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$

$$\boxed{\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu \int_S \vec{\jmath} \cdot d\vec{S} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

Corrientes eléctricas (y variaciones del flujo del campo eléctrico) generan campos magnéticos

$\Rightarrow$ principio del electroimán

Ondas electromagnéticas

Consideremos $\rho = \vec{\jmath} = 0$ (vacío):

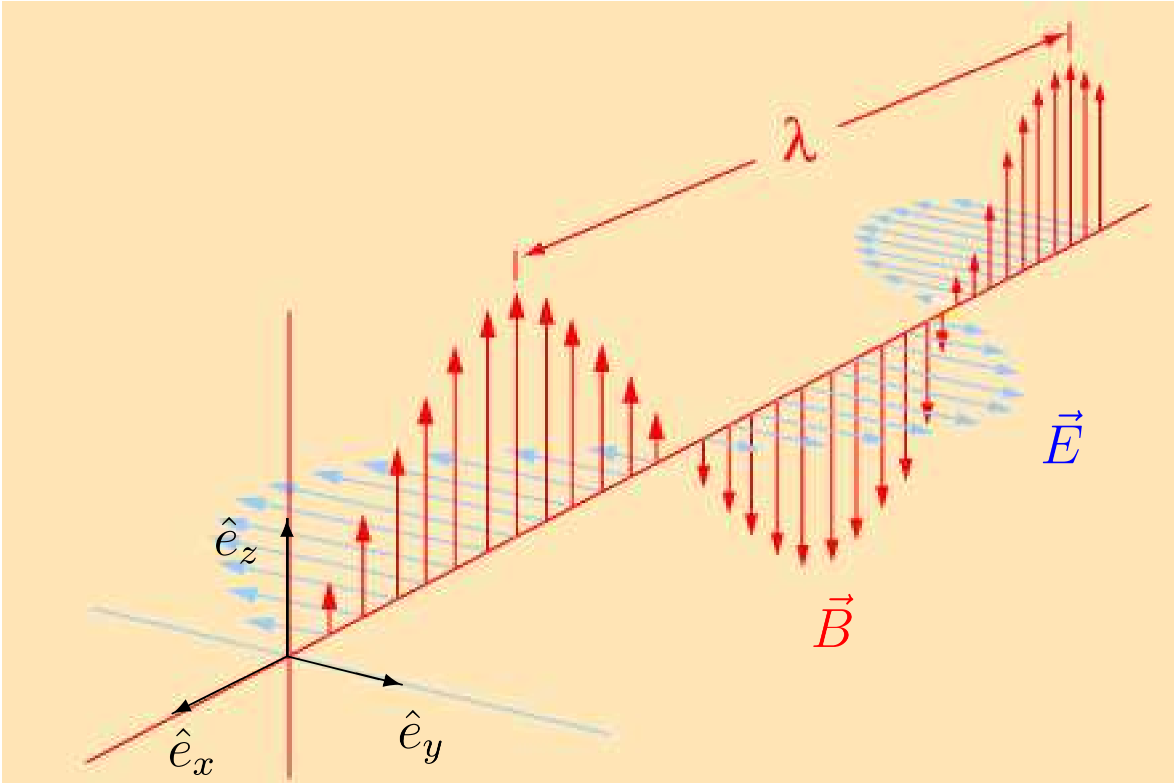
$$
\begin{array}{llcl}
(1) & \nabla \cdot \vec{E} & = & 0 \\
(2) & \nabla \cdot \vec{B} & = & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llcl}
(3) & \nabla \times \vec{E} & = & -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\
(4) & \nabla \times \vec{B} & = & \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}
\end{array}
$$

usaremos la propiedad: $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

$$
\left.
\begin{array}{l}
\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) \overset{(3)}{=} -\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{B}) \overset{(4)}{=} -\mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\
\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \overset{(1)}{=} -\nabla^2 \vec{E}
\end{array}
\right\} \Rightarrow \boxed{\left(\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0}
$$

$$
\left.
\begin{array}{l}
\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) \overset{(4)}{=} \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{E}) \overset{(3)}{=} -\mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \\
\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} \overset{(2)}{=} -\nabla^2 \vec{B}
\end{array}
\right\} \Rightarrow \boxed{\left(\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{B} = 0}
$$

Ecuaciones de ondas para $\vec{E}$ y $\vec{B}$



Soluciones:

$$\vec{E} = E_0 \cos(kx - \omega t)\ \hat{e}_y$$
$$\vec{B} = B_0 \cos(kx - \omega t)\ \hat{e}_z$$

donde $E_0 = \text{const}$, $\quad B_0 = cE_0$, $\quad k = 2\pi/\lambda$, $\quad \omega = 2\pi\nu$, $\quad c = \omega/k = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$

onda electromagnética que se propaga en la dirección del eje x a velocidad c constituida por campos eléctricos y magnéticos oscilantes en las direcciones y y z

Cualitativamente, a partir de la repetición sucesiva de las ecuaciones (3) y (4) en el vacío:

Un campo eléctrico variable produce un campo magnético variable, que a su vez produce un campo eléctrico variable, que a su vez produce un campo eléctrico variable, que a su vez . . .

$\Rightarrow$ las ondas electromagnéticas son capaces de automantenerse

¿Cómo se crean?

– Antena: produce un campo eléctrico variable moviendo muy rápidamente hacia delante y hacia atrás las cargas de un conductor, lo que genera automáticamente un campo magnético variable que inicia la propagación de la onda a través del espacio.

– Desexcitaciones atómicas (tras un calentamiento por ejemplo)

Velocidad de la luz y segundo postulado

El d'Alembertiano $\Box^2$ es invariante Lorentz: $\Box^2 \equiv \nabla^2 - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla'^2 - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t'^2}$

$$\left.\begin{array}{rcl} t &=& \gamma\left(t' + \dfrac{v}{c^2}x'\right) \\ x &=& \gamma(vt' + x') \\ y &=& y' \\ z &=& z' \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{rcl} \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t'} &=& \frac{1}{c}\left(\frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial z}\right) = \gamma\left(\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t} + \beta\dfrac{\partial}{\partial x}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial x'} &=& \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial z} = \gamma\left(\dfrac{\beta}{c}\dfrac{\partial}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\right) \\ && (\beta = v/c,\ c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}) \end{array}$$

Una curiosidad: El valor de ϵ_0 y μ_0 depende del sistema de unidades. En el MKSA se definen:

$$\begin{array}{rcl} \mu_0 &\equiv& 4\pi \times 10^{-7} = 12.566\,370\,614\cdots \times 10^{-7}\ \mathsf{N\ A^{-2}} \\ \epsilon_0 &=& \dfrac{1}{\mu_0 c^2} = \dfrac{10^7}{4\pi c^2} = 8.854\,187\,817\cdots \times 10^{-12}\ \mathsf{F\ m^{-1}} \\ \Rightarrow k_C &\equiv& \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} = \dfrac{c^2}{10^7} = 8.987\,551\,787\cdots \times 10^{9}\ \mathsf{N\ m^2\ C^{-2}} \end{array}$$

$c \equiv 299\,792\,458$ ms^{-1} es exacto, pues 1 m $\equiv$ distancia recorrida por la luz en $1/299\,792\,458$ segundos, y
1 s $\equiv 9.192\,631\,770 \times 10^9$ ciclos de la radiación en la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del ^{133}Cs

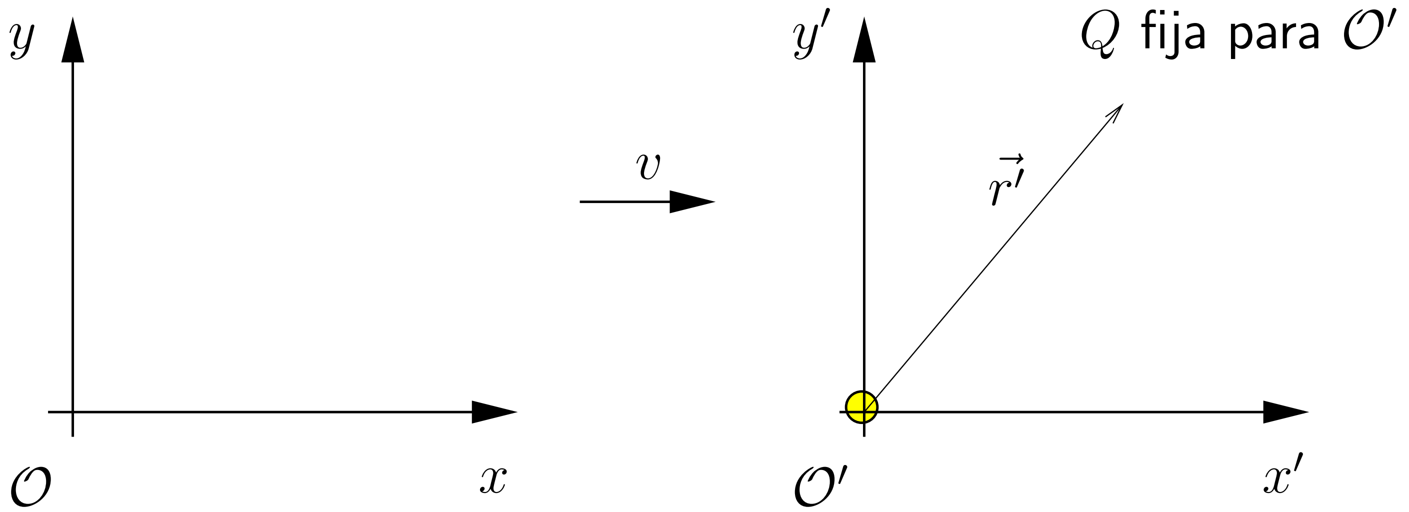
Unificación de electricidad y magnetismo

La invariancia Lorentz de las ecuaciones de Maxwell permite relacionar cómo miden dos observadores inerciales una misma fuerza: eléctrica y/o magnética depende del observador

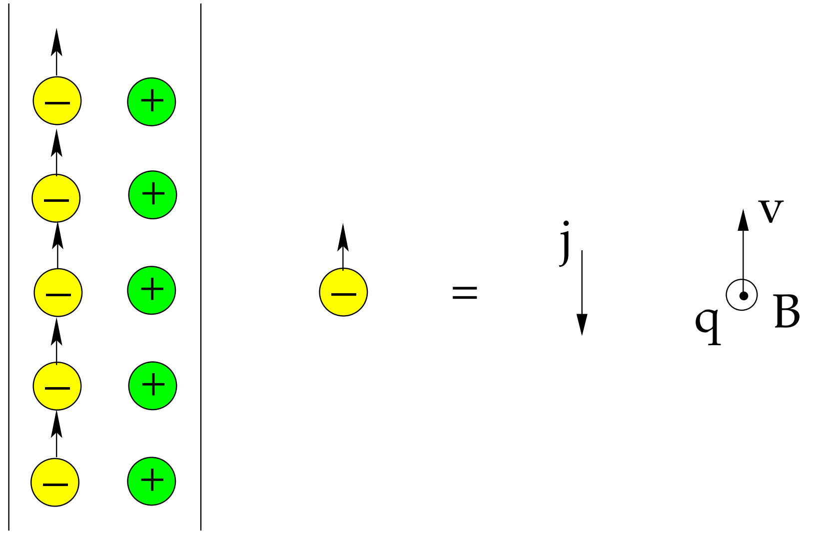
Electricidad y magnetismo son manifestaciones del mismo fenómeno: el electromagnetismo

$$\mathcal{O}: \quad \vec{E} = \gamma \vec{E}' - \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\vec{\beta}\cdot\vec{E}'\vec{\beta}, \qquad \vec{B} = \gamma(\vec{\beta}\times\vec{E})$$

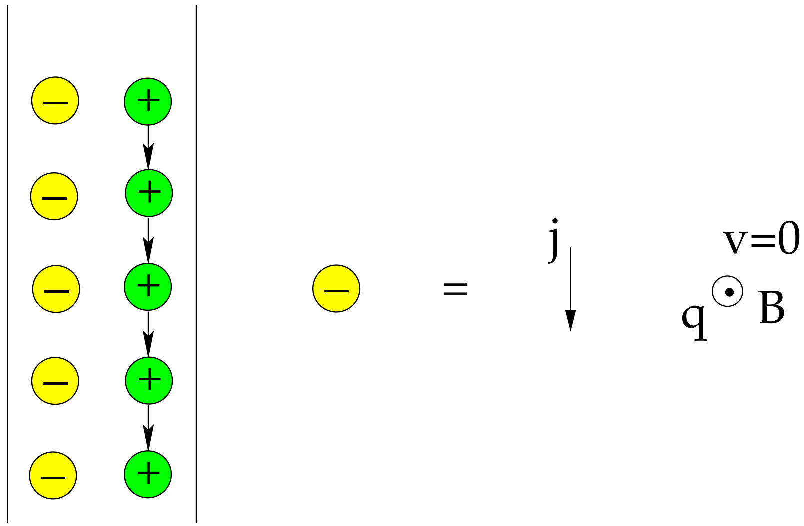
$$\mathcal{O}': \quad \vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r'^2}\hat{r}', \qquad \vec{B}' = 0$$



Paradoja electromagnética



$\Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) \Rightarrow$ Fuerza atractiva



$\Rightarrow \vec{F} = 0 \Rightarrow$!!??

Solución: