T7. DINÁMICA RELATIVISTA: E = mc^2 Y MOVIMIENTO ACELERADO

Introducción

Cuadrivector espacio-tiempo:

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Transformación de Lorentz pura (boost):

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} , \quad \beta = \frac{v}{c} , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(ejes y y z de ambos observadores orientados perpendicularmente al boost, por conveniencia)

Introducción

Cuadrivector espacio-tiempo:

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Transformación de Lorentz pura (boost):

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_1 & \gamma\beta_2 & \gamma\beta_3 \\ \gamma\beta_1 & & & \\ \gamma\beta_2 & & \delta_{ij} + (\gamma - 1)\dfrac{\beta_i\beta_j}{\beta^2} & \\ \gamma\beta_3 & & & \end{pmatrix}}_{L} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} , \quad \beta = \frac{v}{c} , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(en una dirección arbitraria, $\beta^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2$)

La equivalencia entre masa y energía

Existen otros cuadrivectores, cuyas componentes se transforman por definición igual que las coordenadas espaciotemporales bajo transformaciones de Lorentz

Cuadrivector energía-momento:

$$\begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ p_x c \\ p_y c \\ p_z c \end{pmatrix}$$

– En el espacio euclídeo 3D, para un (tri)vector $a \doteq (a_x, a_y, a_z)$ se define

$$\text{módulo } (a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2 \text{ , invariante bajo rotaciones } R$$

– En el espacio 4D de Minkowski, para un cuadrivector $a \doteq (a^0, a^1, a^2, a^3)$ se define

$$\text{módulo } (a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 \text{ , invariante bajo transformaciones de Lorentz } \Lambda$$

La equivalencia entre masa y energía

Las rotaciones espaciales $\mathcal{R}$ son un caso particular de transformación de Lorentz

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

En general,

$$\Lambda = \mathcal{R} L$$

– El módulo del cuadrivector espacio-tiempo es una cantidad invariante (intervalo)

$$\Delta s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

–El módulo del cuadrivector energía-momento es una cantidad invariante (masa)

$$\boxed{(m_0 c^2)^2 = E^2 - (pc)^2}\,, \quad p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$$

La equivalencia entre masa y energía

Podemos distinguir dos casos:

- Un cuerpo de masa $m_0 \neq 0$ tiene (tri)momento $p' = 0$ y energía:

$$E' = m_0 c^2 \,, \quad p' = 0 \quad \text{en reposo}$$

pero en un sistema de referencia en el que se mueva con velocidad v,

$$\begin{pmatrix} E \\ pc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 c^2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E = \gamma m_0 c^2 \,, \quad p = \gamma\beta m_0 c$$

Por tanto

$$E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (pc)^2} \Rightarrow v = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{pc^2}{E} = \beta c$$

consistente con las expresiones anteriores

$$\beta = \frac{pc}{E} \,, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E}{m_0 c^2}$$

La equivalencia entre masa y energía

– La energía mínima de un cuerpo de masa m_0 es su energía en reposo: $E_0 = m_0 c^2$

– Si lo observamos en movimiento, su energía cinética y su momento son:

$$K = E - E_0 = m_0 c^2(\gamma - 1) \xrightarrow[v \ll c]{} m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \cdots - 1\right) \approx \frac{1}{2} m_0 v^2 \, ,$$

$$p = \gamma \beta m_0 c \xrightarrow[v \ll c]{} m_0 v$$

que coinciden con las expresiones newtonianas en el límite no relativista

– Pero incrementando progresivamente la energía (e.g. en un acelerador de partículas) la velocidad no aumentará indefinidamente, pues en el límite ultrarrelativista:

$$v \to c \Rightarrow \gamma \to \infty$$

– Es decir, haría falta una energía infinita para que un objeto de masa m_0 alcance $v = c$. Por tanto, c es una velocidad límite, que no puede rebasarse

- En cambio, para una partícula de masa $m = 0$ (por ejemplo un fotón, un cuanto de luz) no existe el sistema de referencia en reposo, pues

$$E = \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (pc)^2}\,, \quad m_0 = 0 \Rightarrow E = pc \Rightarrow v = \frac{\partial E}{\partial p} = c$$

  es decir, su velocidad es siempre c

Nota: Con (demasiada) frecuencia se llama "masa en reposo" a m_0 y se emplea el término "masa relativista" m para referirse a la energía de un cuerpo de masa m_0 en movimiento,

$$E = mc^2\,, \quad m = \gamma m_0$$

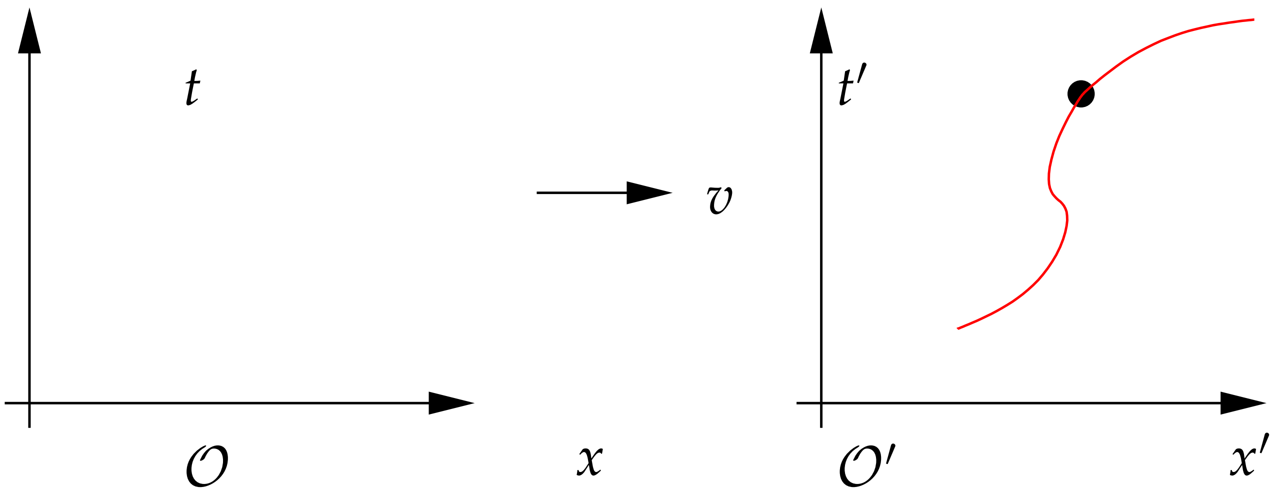
Aquí se usa la terminología más actual, en la que la masa es un invariante relativista m_0

Como componentes que son de un cuadrivector, la energía y el momento dependen del observador y pueden determinarse a partir de sus valores para un observador dado mediante una transformación de Lorentz. Además esta expresión, a diferencia de la de arriba, no es útil en el caso de una partícula como el fotón, que tiene E y p pero no masa y por tanto

$$m_0 = 0 \Rightarrow \beta = 1\,, \quad \gamma = \infty$$

T. Lorentz de velocidades y aceleraciones

Cualquier observador inercial puede medir un movimiento acelerado y comparar sus medidas con las de otro observador inercial mediante transformaciones de Lorentz



$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} , \quad \beta = \frac{v}{c} , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

T. Lorentz de velocidades y aceleraciones

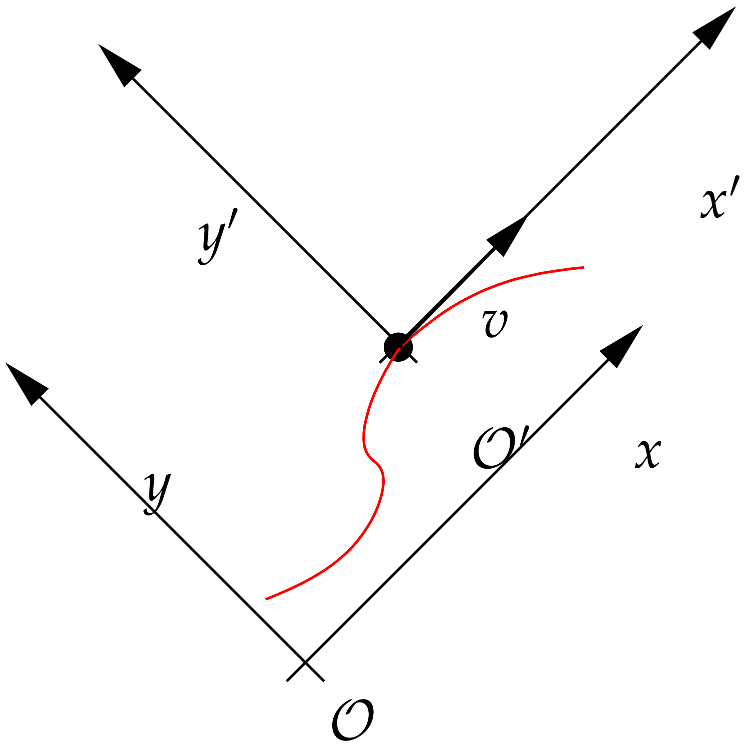
$\mathcal{O}$ mide $\vec{u} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ y $\mathcal{O}'$ mide $\vec{u}' = \dfrac{d\vec{r}'}{dt'}$

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{v + u'_x}{1 + vu'_x/c^2} \\ u_y &= \frac{u'_y}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)} \\ u_z &= \frac{u'_z}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)} \end{aligned}$$

$\mathcal{O}$ mide $\vec{a} = \dfrac{d\vec{u}}{dt}$ y $\mathcal{O}'$ mide $\vec{a}' = \dfrac{d\vec{u}'}{dt'}$

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{a'_x}{\gamma^3(1 + vu'_x/c^2)^3} \\ a_y &= \frac{a'_y}{\gamma^2(1 + vu'_x/c^2)^2} - \frac{vu'_y a'_x/c^2}{\gamma^2(1 + vu'_x/c^2)^3} \\ a_z &= \frac{a'_z}{\gamma^2(1 + vu'_x/c^2)^2} - \frac{vu'_z a'_x/c^2}{\gamma^2(1 + vu'_x/c^2)^3} \end{aligned}$$

Sistema de referencia de reposo instantáneo



$\mathcal{O}'$ instantáneamente en reposo respecto al móvil

$$u'_x = 0, u'_y = 0, u'_z = 0$$

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{a'_x}{\gamma^3} \\ a_y &= \frac{a'_y}{\gamma^2} \\ a_z &= \frac{a'_z}{\gamma^2} \end{aligned}$$

Ejemplo: astronauta en un cohete

Un astronauta parte desde la Tierra con una aceleración continua $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ en su sistema de reposo instantáneo

[Atención: $\mathcal{O}' \neq$ astronauta salvo en un instante]

(a) ¿Cuánto tarda en alcanzar $v = \beta c$?

$$a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{g}{\gamma^3(v)} \Rightarrow \int_0^v \gamma^3(v) dv = \int_0^t g dt, \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

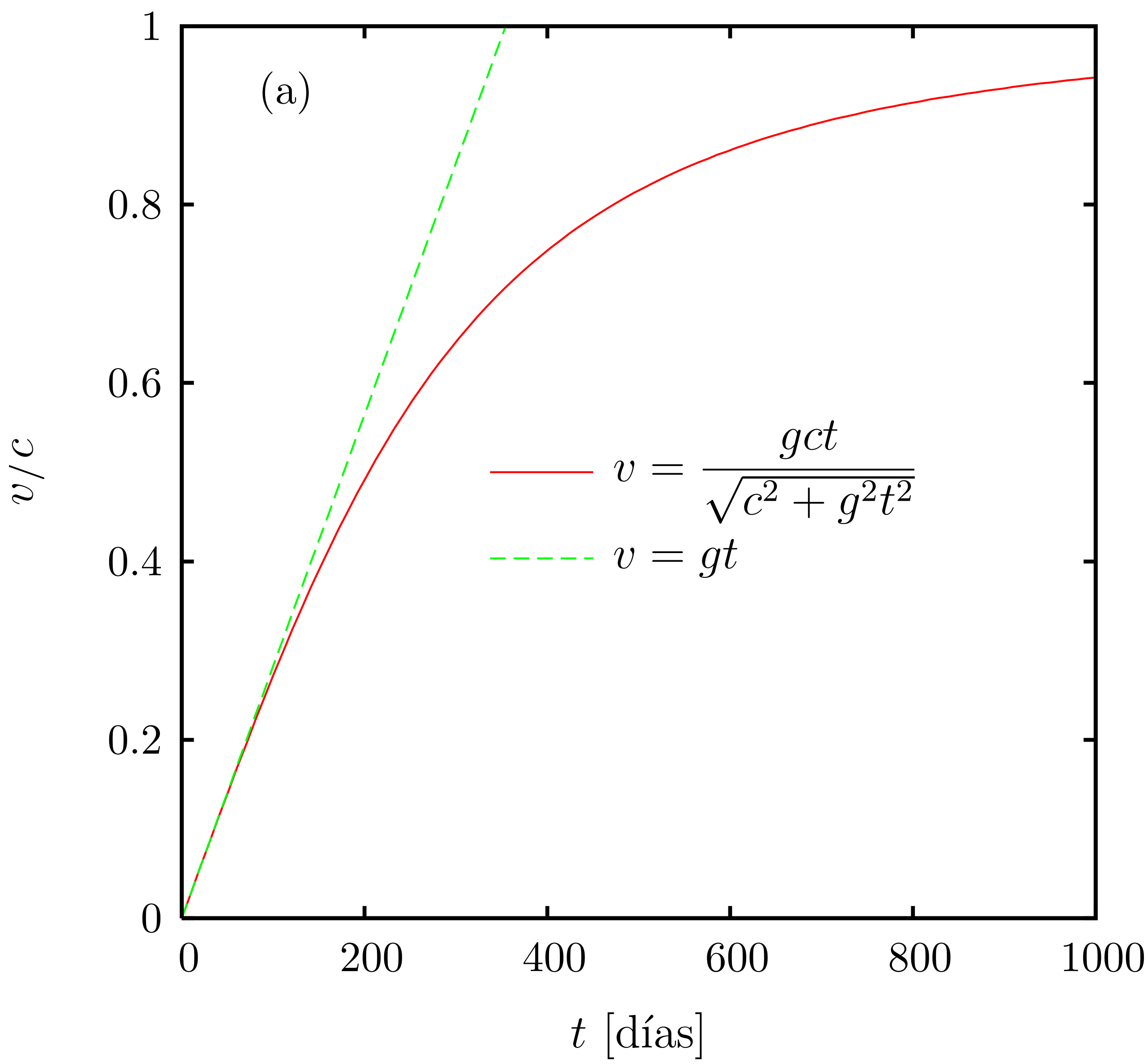
$$\Rightarrow \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = gt$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{gct}{\sqrt{c^2 + g^2 t^2}}} \qquad \text{límite NR: } v = gt$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{\beta c}{g\sqrt{1 - \beta^2}}}$$

$\beta = 0.5 \Rightarrow t = 208$ días	$\beta = 0.9 \Rightarrow t = 730$ días	$\beta \to 1 \Rightarrow t \to \infty$

(a) Velocidad en función del tiempo terrestre



(b) ¿Qué distancia habrá recorrido al cabo de un tiempo terrestre t?

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{gct}{\sqrt{c^2 + g^2t^2}} \quad \Rightarrow \quad \int_0^x dx = \int_0^t \frac{gct}{\sqrt{c^2 + g^2t^2}} dt$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}} - 1\right)} \qquad \text{límite NR: } x = \frac{1}{2}gt^2$$

$$\boxed{t \to \infty \Rightarrow x \to ct}$$

(b) Distancia en función del tiempo terrestre