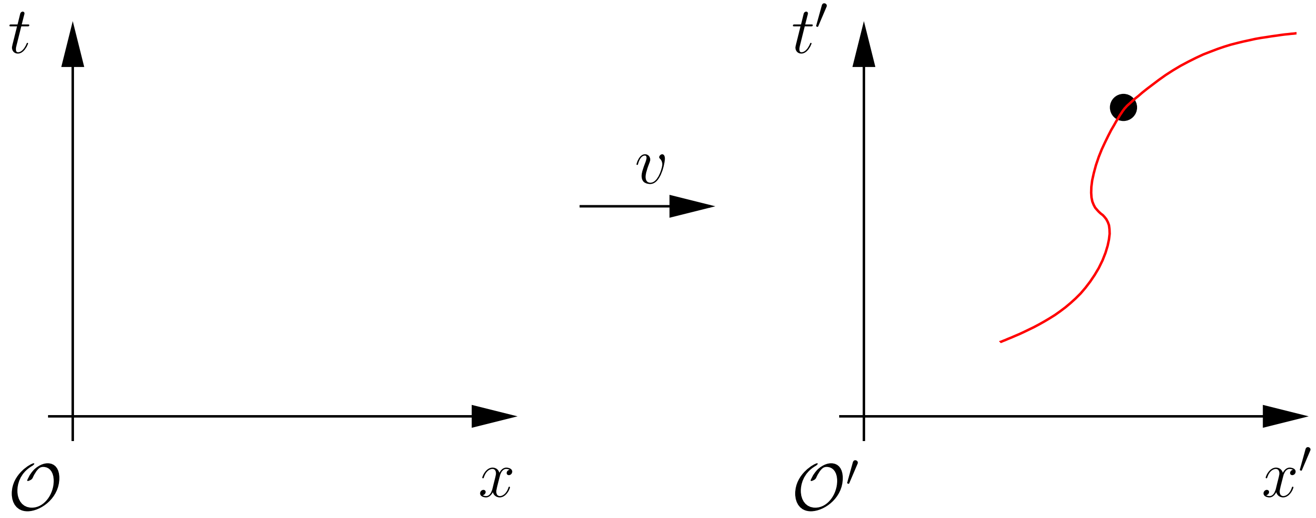
T7. MOVIMIENTOS ACELERADOS MEDIDOS POR OBSERVADORES INERCIALES

1. Introducción
2. Transformaciones de Lorentz para velocidades y aceleraciones
3. Sistema de referencia de reposo instantáneo
4. Ejemplo: astronauta en un cohete

Introducción

Cualquier observador inercial puede medir un movimiento acelerado y comparar sus medidas con las de otro observador inercial mediante transformaciones de Lorentz



$$
\begin{aligned}
t &= \gamma(t' + vx'/c^2) \\
x &= \gamma(vt' + x') \\
y &= y' \\
z &= z'
\end{aligned}
$$

T. Lorentz para velocidades y aceleraciones

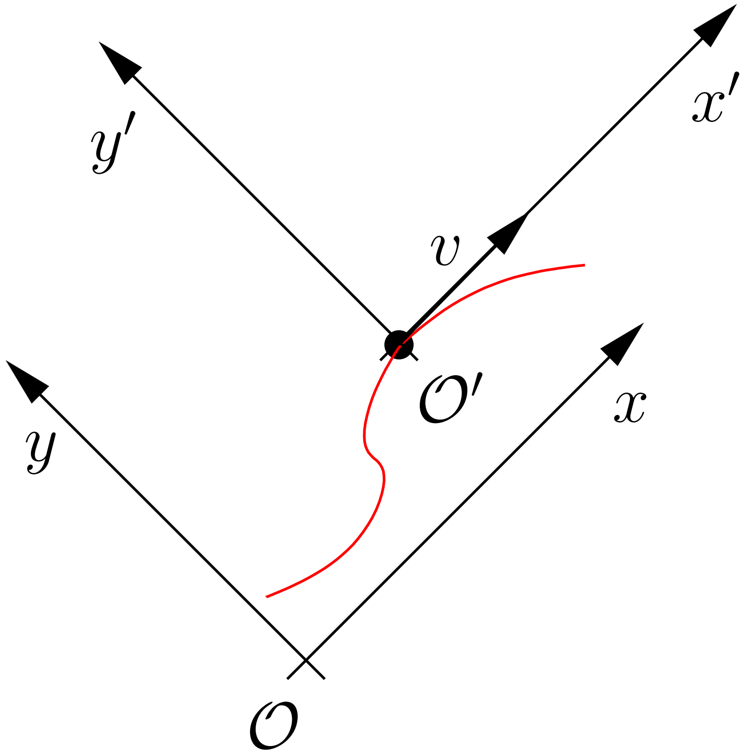
$\mathcal{O}$ mide $\vec{u} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ y $\mathcal{O}'$ mide $\vec{u}' = \dfrac{d\vec{r}'}{dt'}$

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{v + u'_x}{1 + v u'_x/c^2} \\
u_y &= \frac{u'_y}{\gamma(1 + v u'_x/c^2)} \\
u_z &= \frac{u'_z}{\gamma(1 + v u'_x/c^2)}
\end{aligned}$$

$\mathcal{O}$ mide $\vec{a} = \dfrac{d\vec{u}}{dt}$ y $\mathcal{O}'$ mide $\vec{a}' = \dfrac{d\vec{u}'}{dt'}$

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{a'_x}{\gamma^3(1 + v u'_x/c^2)^3} \\
a_y &= \frac{a'_y}{\gamma^2(1 + v u'_x/c^2)^2} - \frac{v u'_y a'_x/c^2}{\gamma^2(1 + v u'_x/c^2)^3} \\
a_z &= \frac{a'_z}{\gamma^2(1 + v u'_x/c^2)^2} - \frac{v u'_z a'_x/c^2}{\gamma^2(1 + v u'_x/c^2)^3}
\end{aligned}$$

Sistema de referencia de reposo instantáneo



$\mathcal{O}'$ instantáneamente en reposo respecto al móvil

$$u'_x = 0, u'_y = 0, u'_z = 0$$

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3}$$

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2}$$

$$a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2}$$

Ejemplo: astronauta en un cohete

Un astronauta parte desde la Tierra con una aceleración continua $g = 9.8$ m/s^2 en su sistema de reposo instantáneo

[Atención: $\mathcal{O}' \neq$ astronauta salvo en un instante]

(a) ¿Cuánto tarda en alcanzar $v = \beta c$?

$$a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{g}{\gamma^3(v)} \quad \Rightarrow \quad \int_0^v \gamma^3(v) dv = \int_0^t g dt, \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = gt$$

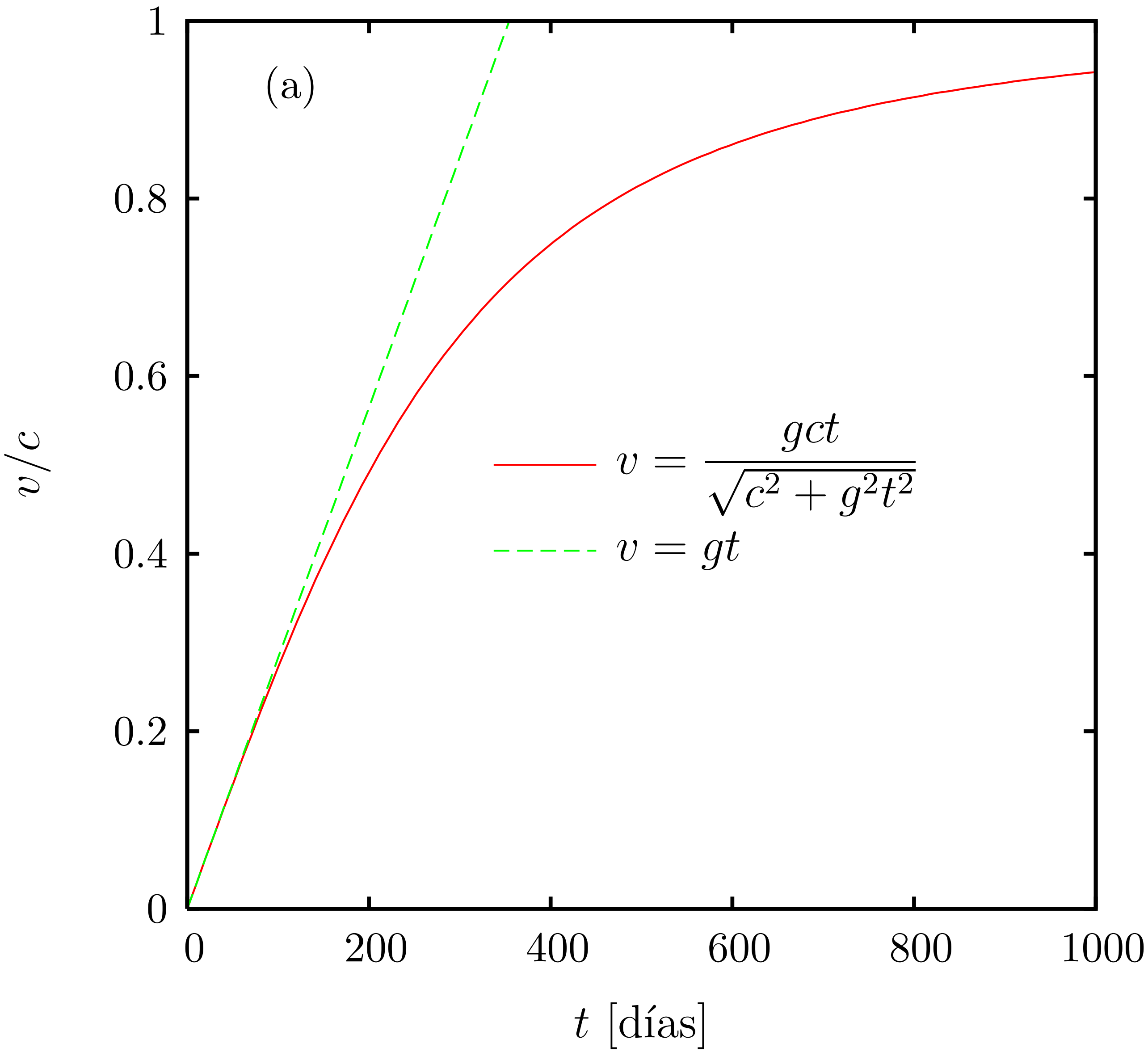
$$\Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{gct}{\sqrt{c^2 + g^2 t^2}}}$$

límite NR: $v = gt$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{\beta c}{g\sqrt{1 - \beta^2}}}$$

$\beta = 0.5 \Rightarrow t = 208$ días	$\beta = 0.9 \Rightarrow t = 730$ días	$\beta \to 1 \Rightarrow t \to \infty$

(a) Velocidad en función del tiempo terrestre



(b) ¿Qué distancia habrá recorrido al cabo de un tiempo terrestre t?

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{gct}{\sqrt{c^2 + g^2t^2}} \Rightarrow \int_0^x dx = \int_0^t \frac{gct}{\sqrt{c^2 + g^2t^2}} dt$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1 + \frac{g^2t^2}{c^2}} - 1\right)}$$

límite NR: $x = \frac{1}{2}gt^2$

$$\boxed{t \to \infty \Rightarrow x \to ct}$$

(b) Distancia en función del tiempo terrestre