T12. RELATIVIDAD GENERAL (IV): COSMOLOGÍA

1. Introducción
2. Modelos de universo
3. La paradoja de Olbers

Modelos de universo

- Suponer homegeneidad e isotropía a gran escala (principio cosmológico)
  $\Rightarrow$ métrica de Robertson-Walker:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right)$$

  – $R(t)$: factor cosmológico de escala [relacionado con tamaño del universo y con z]

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} \approx \frac{v}{c} = H\frac{\delta r}{c} \equiv \frac{\dot{R}}{R}\delta t = \frac{\delta R}{R} = \frac{R_0 - R}{R}$$

$$\Rightarrow 1 + z = \frac{R_0}{R} \text{ definiendo } H = \dot{R}/R$$

  Se suele también definir:

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0} \quad \text{(factor de escala adimensional)}$$

  donde $R_0 = R(t_0)$ es el factor de escala en la época actual.

  – k: parámetro de curvatura [tres valores: $k = +1$ (cerrado) , -1 (abierto) , 0 (plano)]

- Sustituyéndola en las ecuaciones de Einstein: $\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathcal{R}\, g_{\mu\nu} - \Lambda\, g_{\mu\nu} = \dfrac{8\pi G_N}{c^4}\, T_{\mu\nu}$

  y asumiendo que $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$ (fluido perfecto de densidad ρ y presión p) se obtiene la evolución del universo (ecuaciones de Friedmann-LeMaître):

$$\begin{aligned} H^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 &= \frac{8\pi G_N \rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3} \\ \frac{\ddot{R}}{R} &= \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3p/c^2) \end{aligned}$$

  – Universo estático [Einstein, 1917]
  ajustar $\Lambda > 0$ (abandonado en 1920s)
  – Universo en expansión (o recesión)
  Globo sin centro en 3D

- A partir de estas dos ecuaciones se deduce una tercera:

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + p/c^2)$$

  que nos da ρ en función de R para un universo con una sóla componente con ecuación de estado $p = \omega\rho c^2$, pues entonces $\dot{\rho} = -3(1+\omega)\rho\dot{R}/R$ cuya solución es

$$\rho \propto R^{-3(1+\omega)} \propto a^{-3(1+\omega)} \quad \text{si } \omega \neq -1$$

  lo que nos permite conocer la evolución del universo en distintas eras:

– universo dominado por la radiación ($\omega = 1/3$): (depreciando curvatura y Λ)

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 \propto \rho \;, \quad \rho \propto a^{-4} \Rightarrow a(t) \propto t^{1/2} \;; \quad H = \frac{1}{2t}$$

[así era el universo desde el fin de la etapa inflacionaria ($10^{-35} - 10^{-33}$ s tras el Big Bang) hasta que la densidad de materia y radiación se igualaron, unos 10^4 años después.]

– universo dominado por la materia ($\omega = 0$): (depreciando curvatura y Λ)

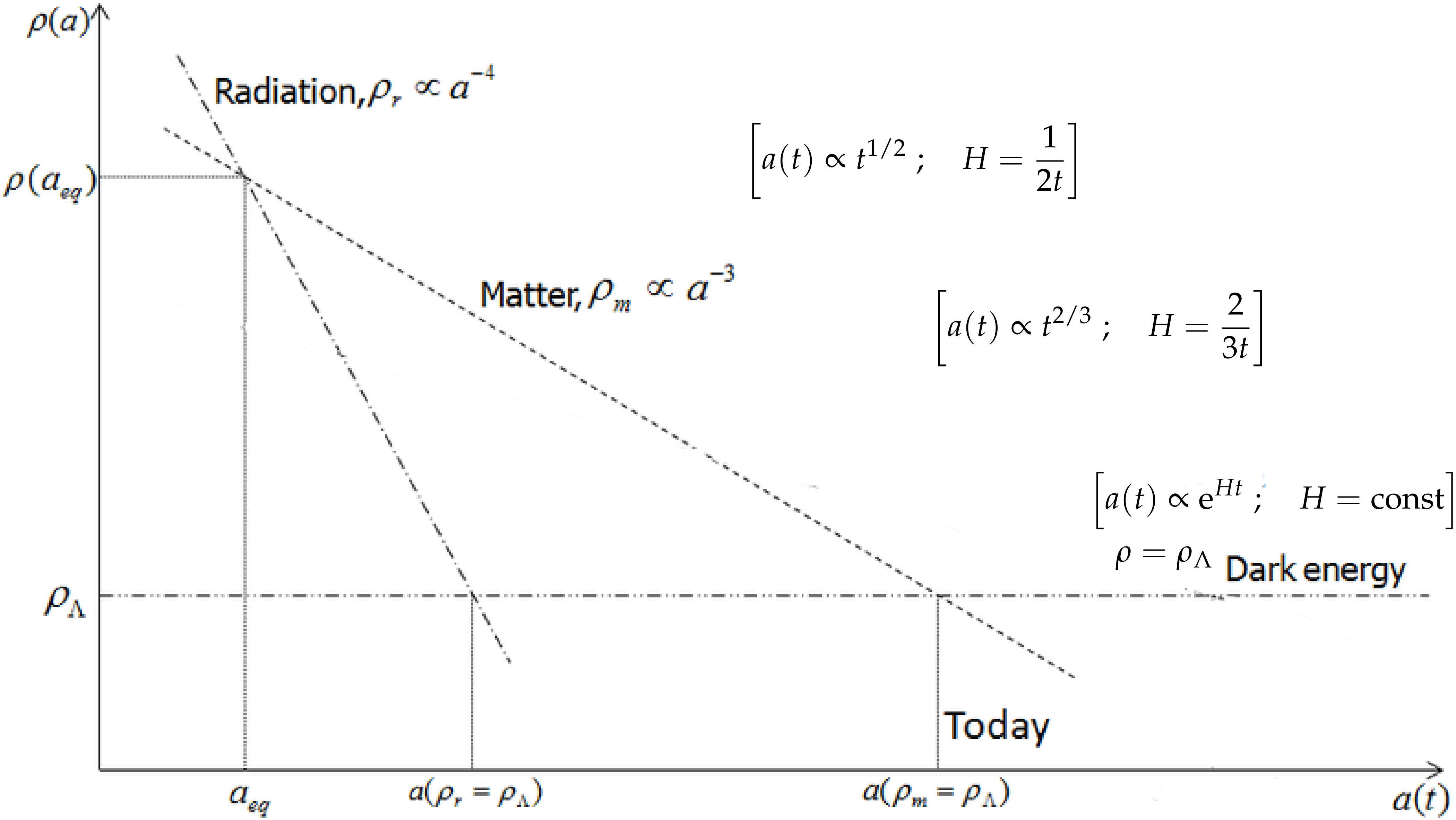
$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 \propto \rho \;, \quad \rho \propto a^{-3} \Rightarrow a(t) \propto t^{2/3} \;; \quad H = \frac{2}{3t}$$

[así ha sido el universo desde que tenía unos 10^4 años, es decir casi siempre]

– universo dominado por la energía del vacío ($\omega = -1$): (depreciando curvatura)

$$\frac{\ddot a}{a} \approx \left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 > 0 \;, \quad \rho = \text{const} \Rightarrow a(t) \propto \mathrm{e}^{Ht} \;; \quad H = \text{const} \;.$$

[así era el universo durante la inflación y así parece ser que empieza a serlo también ahora: un universo dominado por la constante cosmológica.]


$\rho(a)$
Radiation, $\rho_r \propto a^{-4}$
$\rho(a_{eq})$
Matter, $\rho_m \propto a^{-3}$
$\left[a(t) \propto t^{1/2}\ ; \quad H = \frac{1}{2t}\right]$
$\left[a(t) \propto t^{2/3}\ ; \quad H = \frac{2}{3t}\right]$
$\left[a(t) \propto e^{Ht}\ ; \quad H = \text{const}\right]$
$\rho = \rho_\Lambda$ Dark energy
ρ_Λ
Today
a_{eq}
$a(\rho_r = \rho_\Lambda)$
$a(\rho_m = \rho_\Lambda)$
$a(t)$

Parámetros cosmológicos

Su determinación observacional $\Rightarrow$ geometría de nuestro universo k

- El parámetro de Hubble H mide el ritmo de expansión del universo:

  Valor actual (constante de Hubble) $H_0 = \left.\frac{\dot{R}}{R}\right|_0 = 100\ h\ \text{km s}^{-1}\ \text{Mpc}^{-1},\ h = 0.71^{+0.04}_{-0.03}$

- El parámetro de densidad Ω, normalizado a $\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G_N} \simeq 10^{-29}\ \text{g/cm}^3$

  En la época actual:

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c} = \Omega_M + \Omega_\Lambda; \quad \Omega_M = \frac{\rho_M}{\rho_c}, \quad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{3H^2} \quad [\Omega_\gamma = (4.9 \pm 0.5) \times 10^{-5}]$$

$$\begin{aligned}
\Omega_M &= \Omega_B + \Omega_\nu + \Omega_{\text{CDM}} \\
& \qquad \Omega_B = 0.044 \pm 0.004 \approx \Omega_{\text{vis}} \quad (\approx 0.18\ \Omega_M) \\
& 0.003 \lesssim \Omega_{\text{HDM}} \approx \Omega_\nu < 0.015 \\
& \qquad \Omega_{\text{CDM}} = 0.22 \pm 0.04 \qquad\qquad (\approx 0.82\ \Omega_M)
\end{aligned}$$

– Nótese que la primera ecuación de F-LM relaciona H, k y $\Omega = \Omega_M + \Omega_\Lambda$:

$$\boxed{\frac{kc^2}{R^2} = H^2(\Omega - 1)}$$

$\Rightarrow$ $\Omega > 1$: universo cerrado, $\Omega = 1$: universo plano ($k = 0$) y $\Omega < 1$: universo abierto

- La constante cosmológica Λ influye en la distancia de luminosidad d_L FIG

$$H_0 d_L = c\left[z + \frac{1}{2}(q_0 - 1)z^2 + \ldots\right]$$

pues el parámetro de deceleración q_0 vale:

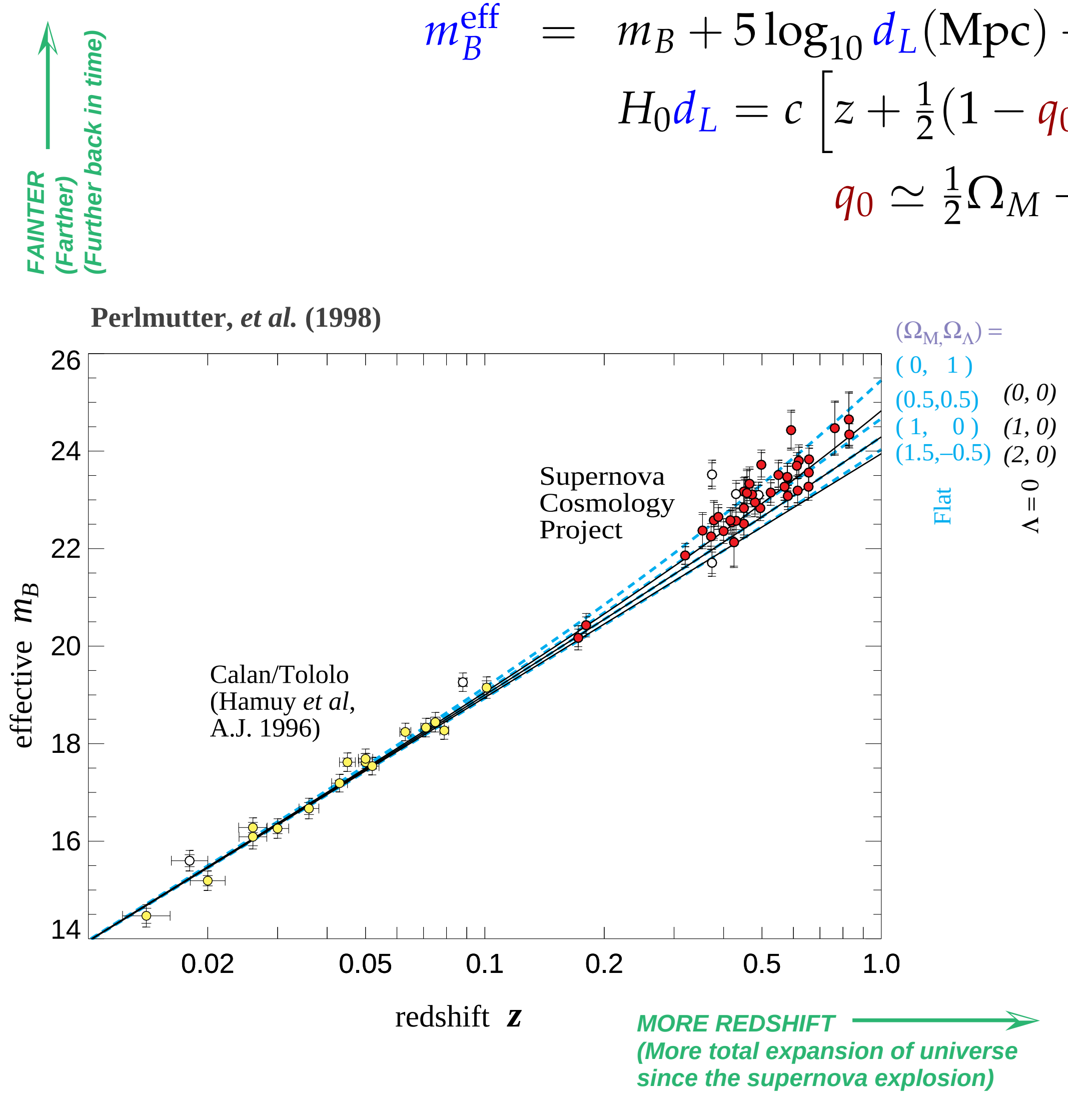
$$q_0 \equiv -\left.\frac{R\ddot{R}}{\dot{R}^2}\right|_0 \approx \frac{1}{2}\Omega_M - \Omega_\Lambda$$

Exactamente: $q_0 = \frac{1}{2}\Omega_0 + \frac{3}{2}\sum_i \omega_i\Omega_i$, donde $\Omega_0 = \sum_i \Omega_i$ y $p_i = \omega_i\rho_i$ (ecuación de estado) es la presión de la especie i, siendo $\omega = 0$ para partículas no relativistas, $\omega = +\frac{1}{3}$ para partículas relativistas y $\omega = -1$ para la constante cosmológica (llamada energía oscura que produce una presión negativa, de sentido contrario a la gravedad)

$$m_B^{\mathrm{eff}} = m_B + 5\log_{10} d_L(\mathrm{Mpc}) + 25$$

$$H_0 d_L = c\left[z + \frac{1}{2}(1-q_0)z^2 + \dots\right]$$

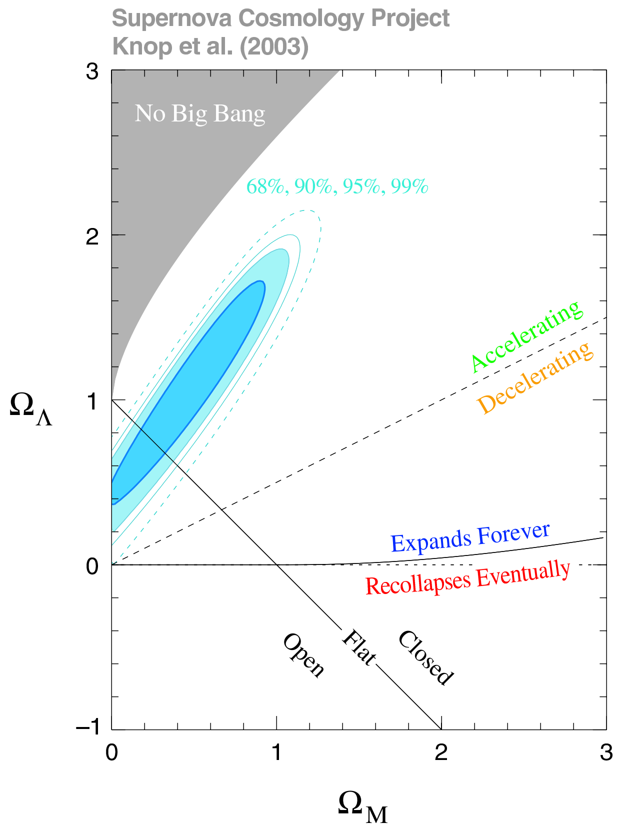
$$q_0 \simeq \frac{1}{2}\Omega_M - \Omega_\Lambda$$

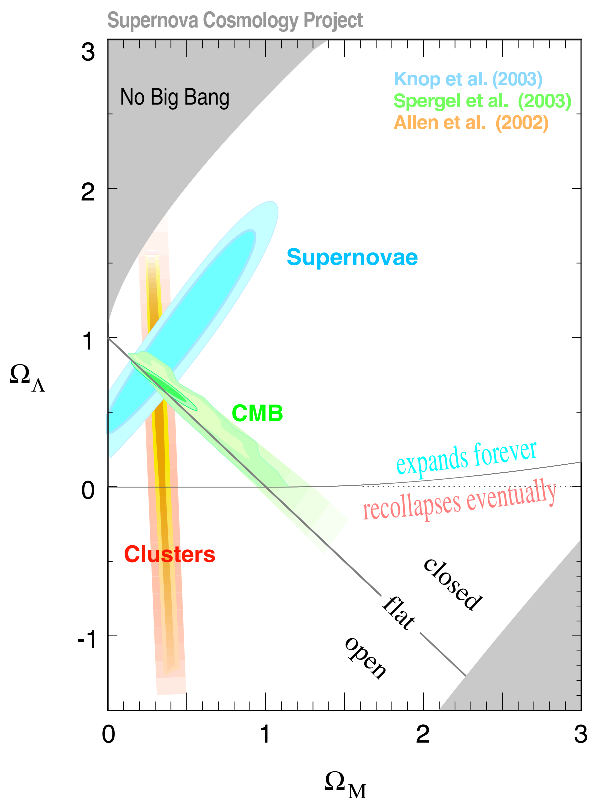


In flat universe: Ω_M = 0.28 [± 0.085 statistical] [± 0.05 systematic]

Prob. of fit to Λ = 0 universe: 1%

$\boxed{\text{Valores observados}} \Rightarrow$ universo plano dominado por la constante cosmológica





$$\Omega_M = 0.27 \pm 0.04$$
$$\Omega_\Lambda = 0.73 \pm 0.04$$

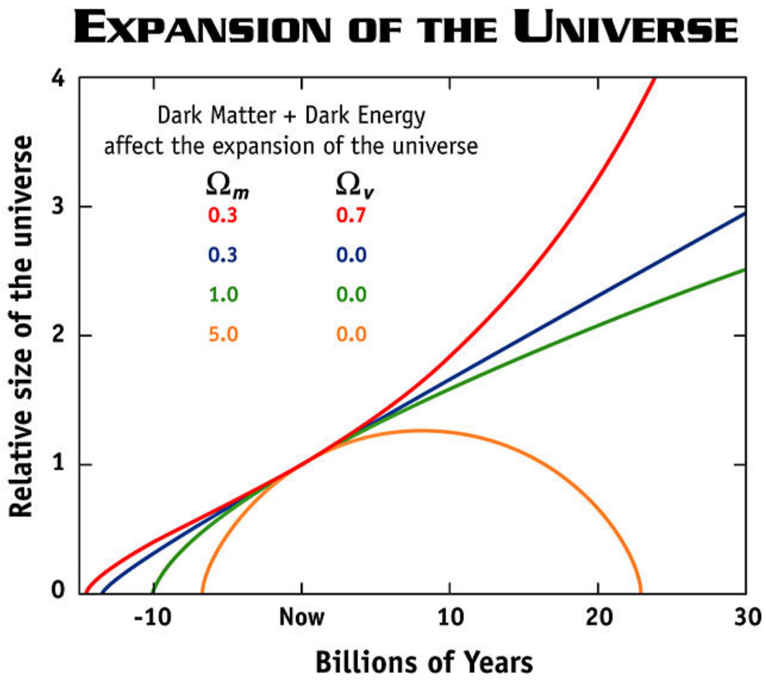
- $\Omega = \Omega_\Lambda + \Omega_M \begin{cases} > 1 & : \text{cerrado} \\ = 1 & : \text{plano} \\ < 1 & : \text{abierto} \end{cases}$
- $q_0 = \frac{1}{2}\Omega_M - \Omega_\Lambda \begin{cases} < 0 & : \text{acelerando} \\ > 0 & : \text{decelerando} \end{cases}$
- destino ...

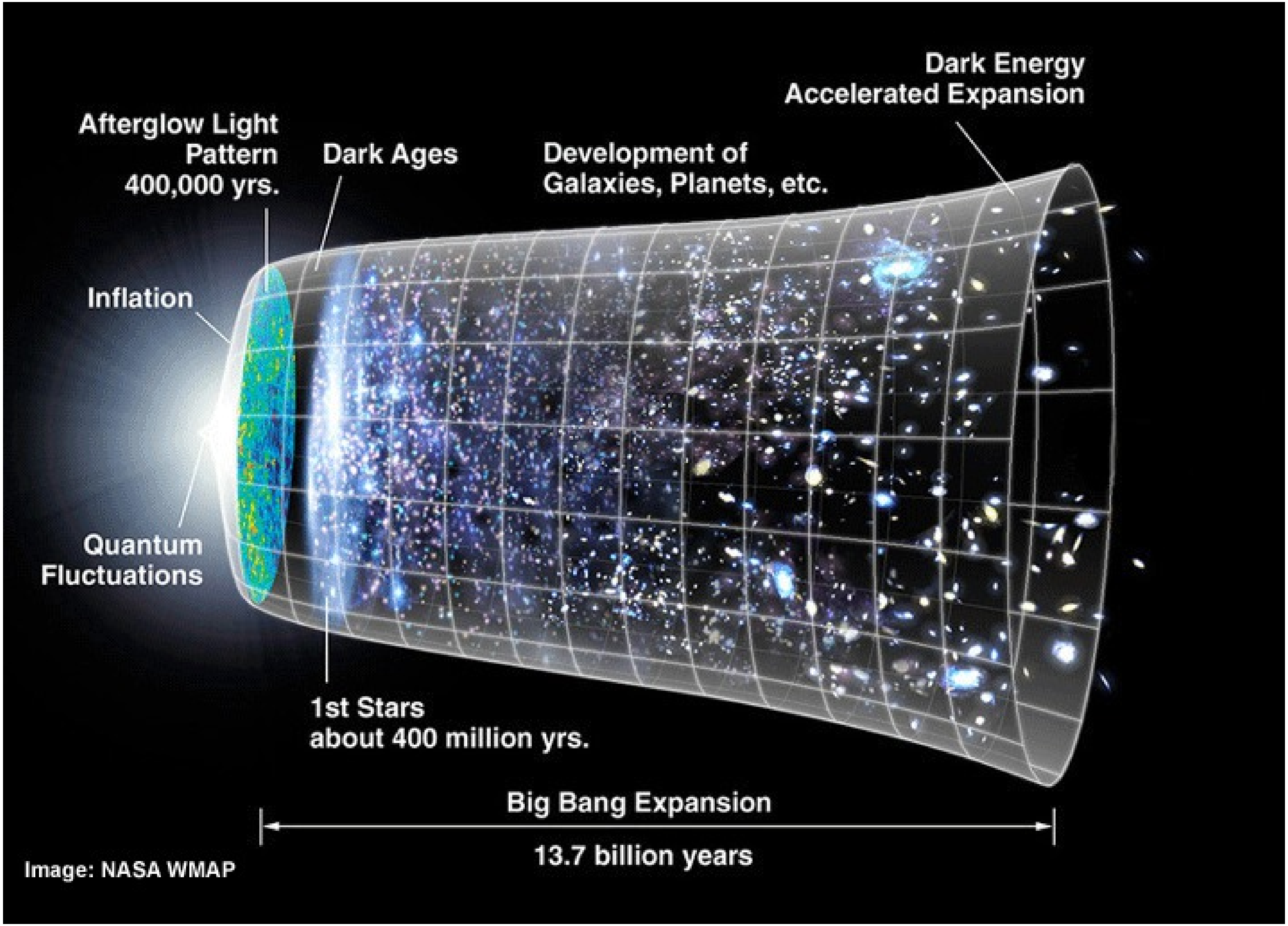
Sobre el destino del universo

- Universo abierto ($k = -1$) $\Rightarrow$ expansión eterna independiente de Λ

- Universo cerrado ($k = +1$) $\Rightarrow$ recolapso si $0 \leq \Lambda < f(\Omega_M)$
  expansión eterna si $\Lambda > f(\Omega_M) > 0$

Evolución del universo




Afterglow Light
Pattern
400,000 yrs.
Dark Ages
Development of
Galaxies, Planets, etc.
Dark Energy
Accelerated Expansion
Inflation
Quantum
Fluctuations
1st Stars
about 400 million yrs.
Big Bang Expansion
13.7 billion years
Image: NASA WMAP

La paradoja de Olbers

[Kepler s. XVII, Halley, Cheseaux s XVIII, Olbers s. XIX]

¿Por qué no es el cielo de noche tan uniformemente brillante como la superficie del Sol?

	Explicaciones	Discusión
1	Existencia de polvo	Mal. Se calentaría; oscurecería el Sol
2	Número finito de estrellas	No. Aun así todas brillarían mucho
3	Distribución no uniforme de estrellas	Quizás. No, según el principio cosmológico
4	Expansión (oscurecimiento Doppler)	Sí. Contribuye pero menos que la siguiente
5	El universo es joven	Sí. La luz no ha tenido tiempo de llegar

Soluciones de la paradoja incompatibles con universo estático y eterno

Estructura a gran escala del universo