Parte II

RELATIVIDAD GENERAL

Tema 9

EL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA DE INERCIA Y GRAVEDAD

9.1 Introducción

Ya hemos estudiado la relatividad especial, que se aplica a observadores no acelerados (inerciales). La generalización a cualquier observador fue un proceso difícil que Einstein llevó a cabo gradualmente entre 1907 y 1915. La relatividad general es más compleja que la especial y requiere un mayor esfuerzo para su comprensión por dos razones fundamentalmente: las matemáticas necesarias involucran el cálculo tensorial y la geometría diferencial[1] y además no sólo hemos de enfrentarnos a los efectos contrarios a la intuición que hemos mencionado en capítulos anteriores sino que además éstos tienen lugar en un escenario extraño: un espacio curvo (geometría no euclídea) que contrasta con las ideas sobre el espacio que tenemos desde la escuela.

9.2 El principio de equivalencia

Einstein buscaba la forma de generalizar su principio de relatividad, *las leyes de la física son las mismas para cualquier observador inercial*, incluyendo en particular la imposibilidad de distinguir estados de reposo o de movimiento absoluto uniforme, de modo que no existieran observadores privilegiados de ningún tipo, ni siquiera los acelerados. Esto parece ir en contra de la experiencia pues, si bien sabemos que un viajero en un tren que se desplaza uniformemente por una vía no distingue si está parado o se mueve (a no ser que mire por la ventanilla), un viajero en un tren que acelera nota una fuerza que le empuja contra su asiento. Parece que las aceleraciones sí son absolutas, es decir, podrían determinarse sin referencia a nada externo.

Este problema quedó resuelto cuando Einstein tuvo en 1907 lo que él mismo llamó 'la

[1] El mismo Einstein tuvo que aprender sobre la marcha las herramientas matemáticas que iba necesitando al desarrollar la teoría.

idea más feliz de mi vida'. Según cita su biógrafo A. Pais: "Estaba sentado en la oficina de patentes de Berna cuando de repente pensé: 'Si una persona sufre una caída libre, no siente su propio peso'. Estaba paralizado. Esta reflexión tan simple me condujo a una teoría de la gravitación". Esta idea feliz cristalizó en el llamado **principio de equivalencia**:

> *En una pequeña región del espacio cualesquiera efectos producidos por la gravitación son los mismos que los producidos por una aceleración.*

Nótese que Einstein postula que el movimiento de objetos no es el único efecto que es equivalente al producido por la gravitación sino *cualquier* efecto producido por una aceleración. Éste es un principio que, como el de la relatividad especial, no ha podido ser rebatido experimentalmente. Además tiene importantísimas consecuencias:

1. El principio de equivalencia permitió a Einstein dar validez general a su principio de relatividad: la *relatividad general*.
2. El principio de equivalencia resuelve un viejo enigma: la *igualdad de la masa inercial y la masa gravitatoria*, es decir, el hecho de que todos los cuerpos caen con la misma aceleración en un campo gravitatorio.
3. La relatividad general *es* una *teoría de la gravitación*.

Analizaremos estas tres cuestiones a continuación.

9.2.1 La relatividad general

Supongamos que nos encontramos en una nave en el espacio alejados de cualquier objeto del universo, de modo que la gravedad sea despreciable. Si se enciende el cohete propulsor y éste aplica una fuerza constante, la nave experimentará una aceleración uniforme y sentiremos una fuerza que nos empujará hacia al suelo, la misma que si estuviéramos sobre la superficie de un planeta, sin activar el cohete, debido a la acción de la gravedad. De hecho, *si no miramos por la ventanilla de la nave no sabremos si estamos sintiendo la fuerza de aceleración del cohete o si estamos sintiendo la fuerza de la gravedad* (Fig. 9.1).

¿Por qué *en una pequeña región del espacio*? Si la nave espacial fuera muy grande la trayectoria en caída libre de varios objetos separados entre sí una gran distancia (caen hacia el centro del planeta por la acción de la gravedad) correspondería a líneas verticales que se van acercando.[2] En cambio, éstas siempre serían paralelas cuando el movimiento se debe a la aceleración del cohete. De este modo podríamos distinguir entre fuerzas inerciales y gravitatorias. Sin embargo, este efecto se minimiza hasta desaparecer cuando la nave (región del espacio considerada) es suficientemente pequeña. Este *carácter local del sistema de referencia inercial* es una característica esencial del principio de equivalencia (Fig. 9.2).

[2]Este efecto produce las *fuerzas de marea* que son responsables, por ejemplo, de los anillos de Saturno.

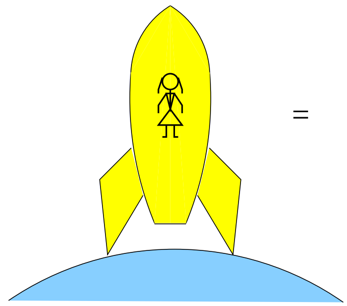


Figura 9.1: Ilustración del principio de equivalencia.

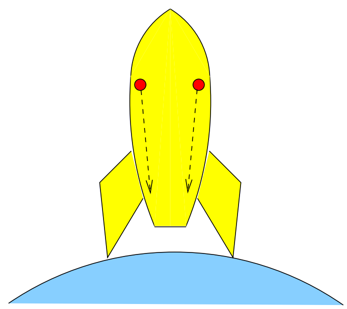


Figura 9.2: Ilustración del carácter local del sistema de referencia inercial en caída libre.

9.2.2 La igualdad de masa inercial y masa gravitatoria

Si dejamos caer desde la misma altura dos objetos llegarán al suelo a la vez, siempre que eliminemos (o sea despreciable) el rozamiento con el aire. Éste último detalle confundió a *Aristóteles*, que creía que los objetos más pesados caían más rápido. Hay registros de *Philiponos* ya en el siglo V afirmando que, incluso cuando la diferencia de pesos es muy grande, la diferencia en los tiempos de caída es muy pequeña.

No fue hasta el siglo XVI cuando se empezaron a realizar experimentos para verificar la igualdad de los tiempos de caída. Los más importantes, aunque no los primeros, los llevó a cabo *Galileo*, del que se dice (¿falsamente?) que lanzaba objetos desde la torre de Pisa. Sus experimentos más precisos consistían, sin embargo, en hacer oscilar péndulos de la misma longitud con bolitas de diferentes materiales y comprobar que tras "miles de oscilaciones" seguían sincronizados, es decir sus periodos eran los mismos. Probablemente exageraba, pues los efectos de rozamiento con el aire debían ser significativos.

Un siglo más tarde *Newton* refinó los experimentos con péndulos, rodeando las bolitas de diferentes materiales con cajitas idénticas de madera para que el rozamiento con el aire fuese casi el mismo en todos los casos. La física newtoniana dio una explicación a la remarcable igualdad de los periodos de los péndulos. Por un lado, Newton había desarrollado un modelo para explicar el fenómeno de la gravedad, que permitía predecir la fuerza gravitatoria que actúa entre dos cuerpos de masas (gravitatorias) m_{G_1} y m_{G_2} separados una distancia r:

$$F = G_N \frac{m_{G_1} m_{G_2}}{r^2}, \quad G_N = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3\ \mathrm{kg}^{-1}\ \mathrm{s}^{-2} \quad \text{[constante de Newton]}\,.$$

En particular, la Tierra atrae a una masa m_G situada en su superficie con una fuerza

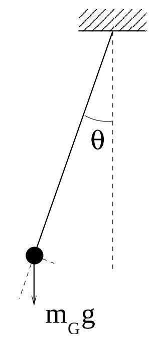
$$F = m_G g, \quad g = G_N M_\oplus / R_\oplus^2 = 9.8 \text{ m s}^{-2} \quad \text{[aceleración de la gravedad]} .$$

Por otro lado, la segunda ley de Newton predice el movimiento de un objeto de masa (inercial) m_I sometido a una fuerza cualquiera:

$$F = m_I a .$$

En principio, la *masa gravitatoria* y la *masa inercial* son dos atributos de la materia muy diferentes. El primero es una medida de la intensidad con que un cuerpo atrae a otro por la acción de la gravedad y el segundo es una medida de la resistencia a cambiar su estado de movimiento. *Si ambas coinciden*, $m_G = m_I$, el movimiento de un cuerpo en caída libre es independiente de la masa, pues entonces $a = g$. Aplicando el mismo razonamiento al problema del péndulo, para ocilaciones de ángulo θ pequeño:

$$m_G g \sin\theta = m_I a$$



es fácil demostrar que, si su longitud es ℓ, el periodo es

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_I}{m_G}\frac{\ell}{g}} .$$

Los experimentos de Newton mostraban que

$$\frac{|m_I - m_G|}{m_I} < 10^{-3} .$$

Pero *¿por qué dos propiedades de un cuerpo tan distintas habían de ser iguales?* Esta cuestión la resolvió *Einstein* con su principio de equivalencia. Hasta ese momento, y también con posterioridad, los experimentos no hicieron sino confirmar la igual de masa gravitatoria y masa inercial. El principio de equivalencia pone fin al enigma: un observador en la nave espacial, alejada de cualquier campo gravitatorio externo, ve caer dos objetos cualesquiera con la misma aceleración cuando el cohete se enciende, lo que implica que ambos caerán libremente con la misma aceleración en un campo gravitatorio.

En 1889 y 1908 el barón húngaro *Eötvös* y colaboradores usaron la famosa balanza de torsión para mejorar el límite anterior a menos de 3×10^{-9}. La balanza (Fig. 9.3) consiste en una varilla suspendida horizontalmente de un hilo de cuyos extremos cuelgan dos masas, A y B, a distancias ℓ_A y ℓ_B, respectivamente, del punto de suspensión de la varilla. Sobre ellas actúan la fuerza de la gravedad (verticalmente) y la fuerza centrífuga debida a la rotación de la Tierra, que es suficientemente grande en la latitud de Hungría. La aceleración centrífuga tiene dos componentes, una vertical (a_z) de sentido contrario a la aceleración de la gravedad (g), y otra horizontal paralela a la superficie (a_s). No es difícil ver que la balanza experimentaría un giro de momento

$$T = \ell_A a_s m_{G_A} \left(\frac{m_{I_A}}{m_{G_A}} - \frac{m_{I_B}}{m_{G_B}} \right)$$

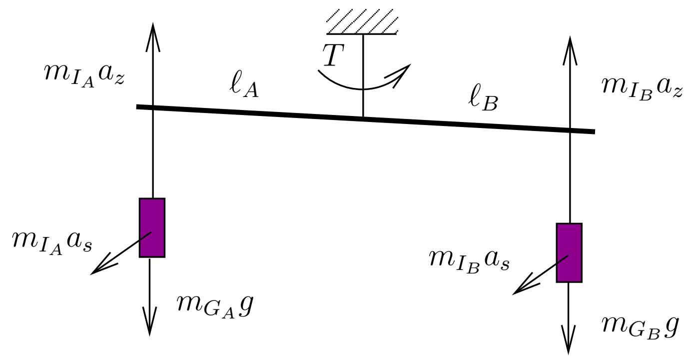


Figura 9.3: Esquema de la balanza de torsión del barón Eötvös.

siempre que las masas inerciales y gravitatorias no coincidan. No se detectó ningún giro, con lo que se obtuvo el límite antes mencionado.

Deduzcamos la expresión anterior: La condición de equilibrio

$$\ell_A(m_{G_A}g - m_{I_A}a_z) = \ell_B(m_{G_B}g - m_{I_B}a_z)$$

nos permite determinar ℓ_B y sustituirla en la expresión del momento de giro:

$$\begin{aligned} T &= \ell_A m_{I_A} a_s - \ell_B m_{I_B} a_s \\ &= \ell_A m_{I_A} a_s \left[1 - \frac{\dfrac{m_{G_A}}{m_{I_A}}g - a_z}{\dfrac{m_{G_B}}{m_{I_B}}g - a_z}\right] \\ &\approx \ell_A m_{I_A} a_s \left[1 - \frac{m_{G_A}}{m_{G_B}}\frac{m_{I_B}}{m_{I_A}}\right] \end{aligned}$$

donde hemos despreciado $a_z \ll g$, lo que conduce trivialmente a la expresión deseada.

En 1964 *Dicke* y colaboradores mejoraron el método de Eötvös utilizando la gravedad del Sol y de la Tierra y la aceleración centrífuga respecto al Sol. La ventaja es que ésta última va cambiando cada 24 horas lo que permite eliminar errores sistemáticos. De este modo el límite se redujo a menos de 10^{-11}. El experimento más preciso hasta la fecha se llevó a cabo en 1999 por *Baessler* y colaboradores, alcanzando un límite de menos de 10^{-13}. Se espera llegar a 10^{-18} usando un experimento en órbita llamado STEP.[3]

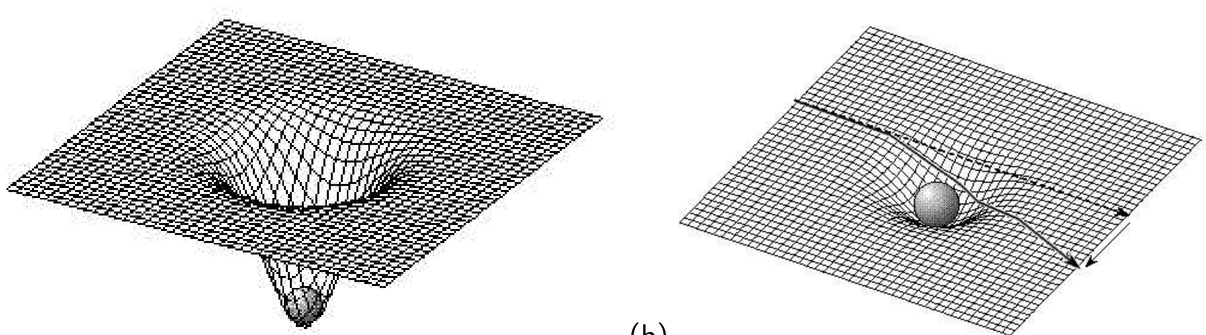
9.2.3 La teoría de la gravitación

Según la física newtoniana un objeto se mueve a través del espacio en línea recta, con velocidad uniforme, a menos que sobre él actúe una fuerza. Así por ejemplo, un planeta se movería en línea recta si no fuera por la fuerza gravitatoria que el Sol ejerce sobre él.

[3] Se lanzará en agosto de 2005. Véase http://einstein.stanford.edu/STEP/.

En física relativista un objeto también se mueve en línea recta, con velocidad uniforme, a menos que actúe una fuerza, pero ahora se trata de una 'línea recta', entendida como *el camino más corto*, en el espaciotiempo y no en el espacio tridimensional. Esto es incluso cierto en presencia de gravedad. La razón es que para Einstein *la gravedad no es una fuerza* sino una distorsión del espaciotiempo debida a la presencia de una masa. El *campo gravitatorio* se manifiesta en la *geometría del espaciotiempo*. Así, el Sol no ejerce una fuerza sobre el planeta sino que curva el espaciotiempo a su alrededor, de modo que el planeta, que sigue el camino más corto (*geodésica*) describe una trayectoria curva en el espacio tridimensional.

Es imposible visualizar la curvatura del espaciotiempo (cuatro dimensiones) pero podemos representar un mundo bidimensional análogo, una superficie, en la que estuvieran confinados objetos que siguen el camino más corto posible. Dos ejemplos, curvatura fija: las rutas de los aviones sobre la superficie terrestre (círculos máximos); curvatura variable (más parecida a un campo gravitatorio): el camino más corto entre dos puntos en una sábana elástica deformada por una bola pesada (Fig. 9.4). Las ecuaciones de campo de Einstein expresan la curvatura en función de la distribución de masa y energía en cada punto del espaciotiempo. Esta visión geométrica de la gravitación será discutida con más calma en el siguiente capítulo.



(a) (b)

Figura 9.4: Ilustración bidimensional de la curvatura del espaciotiempo en presencia de una masa.

Una de las grandes predicciones de la teoría de Einstein es que no sólo los objetos masivos sufren la acción de la gravedad sino también los rayos de luz, que siguen el camino más corto en un espacio curvo (Fig. 9.4b). En los siguientes capítulos trataremos ésta y otras predicciones de la relatividad general (algunas espectaculares) así como algunos de los tests que de ella se han ido realizando desde que la teoría fue formulada.

Para finalizar esta sección conviene añadir que la teoría de Einstein *describe* las interacciones gravitatorias *más* (una mayor cantidad de fenómenos) y *mejor* (con mayor precisión) que la de Newton, aportando además una *nueva visión del mundo*. La teoría de Newton es de todas formas una excelente aproximación para objetos que no se muevan muy rápido y estén sometidos a campos gravitatorios débiles (es incluso suficiente para governar una nave espacial a través de nuestro sistema solar).

9.3 Relatividad general y el principio de Mach

Newton y Mach discrepaban sobre el origen de la inercia. Newton creía que las fuerzas de inercia (la fuerza centrífuga por ejemplo) aparecen cuando la aceleración tiene lugar respecto al "espacio absoluto", mientras que para Mach estaban causadas por la aceleración respecto a la masa de todos los cuerpos celestes. No se trata de una distinción metafísica sino de algo que se puede intentar discernir experimentalmente: si Mach tuviera razón la presencia de grandes masas podría producir pequeños cambios en las fuerzas de inercia observadas en sus cercanías, mientras que si Newton tuvieran razón no se observaría ningún efecto.

Einstein se consideraba a sí mismo machiano. Sin embargo el principio de equivalencia propone una tesis intermedia entre la de Newton y la de Mach: los observadores inerciales (sistemas de coordenadas localmente en caída libre) vienen determinados por el campo gravitatorio local que a su vez depende de toda la materia del universo, cercana o lejana, a través de las ecuaciones de campo; sin embargo, una vez que nos encontramos en un sistema inercial las leyes de movimiento no están afectadas por la presencia de masas. Por ejemplo, un observador en la Tierra (sistema en caída libre hacia el Sol) no puede detectar ninguna fuerza inercial en la dirección del Sol.[4] Dicho de otra manera: si no hay masas cerca, las coordenadas de un observador inercial vienen dadas por la distribución de masas de todo el universo (de acuerdo con Mach) por lo que no es de extrañar que se encuentre en reposo o en movimiento uniforme respecto a las estrellas fijas; y si hay una gran masa cerca (como nos ocurre con el Sol) entonces ésta modificará las coordenadas del observador inercial de modo tal que en su caída libre hacia la masa cercana tampoco puede sentir ningún efecto gravitatorio (lo cual es contrario al principio de Mach).

La cuestión es por tanto si la presencia de masas cercanas altera las leyes de movimiento o si no produce más efecto que determinar las coordenadas de los sistemas inerciales. En 1961 dos grupos independientes llevaron a cabo sendos experimentos para intentar determinar si se observaba algún cambio en la masa inercial de una partícula cuando era acelerada hacia el centro galáctico o en dirección contraria. Los resultados fueron negativos, lo que favorece al principio de equivalencia frente al principio de Mach.

[4] Sólo porque la Tierra no es puntual se puede detectar el efecto gravitatorio del Sol a través de las mareas.