

Tema 8

ELECTROMAGNETISMO Y RELATIVIDAD ESPECIAL

8.1 Introducción

Al principio del Curso, cuando hablábamos de la visión que se ha tenido a lo largo de la Historia acerca de la naturaleza de la luz, indicábamos los trabajos de Maxwell sobre el electromagnetismo, a mediados del siglo XIX, como un hito importante. También lo fue para el desarrollo de la teoría de la relatividad especial.

Los *fenómenos eléctricos* se conocían desde la Antigua Grecia: tras frotar una varilla de ámbar, en griego *elektrum*, con un trozo de piel se observaba que la piel se erizaba y que el ámbar podía atraer pequeños objetos, cabellos por ejemplo. Ya en el siglo XVIII se sabía que hay cargas de dos tipos (positivas y negativas, según la terminología de B. Franklin) y que cargas de distinto signo se atraen mientras que las de igual signo se repelen.

Los *fenómenos magnéticos* se conocen desde mucho antes que los eléctricos: trozos de un mineral llamado *magnetita* (imán natural) pueden atraerse o repelerse entre sí, dependiendo de su orientación relativa, y además, suspendidos libremente, tienen la propiedad de orientarse en dirección norte-sur lo que dio origen al invento de la brújula.

Pero hasta el siglo XIX la electricidad y el magnetismo eran meras curiosidades. En 1820 Ampère y Oersted mostraron que cargas en movimiento (corrientes eléctricas) podían producir efectos magnéticos (ley de Ampère) y poco después Faraday mostró que imanes en movimiento podían producir corrientes eléctricas (ley de inducción de Faraday). Este trabajo condujo al invento del motor eléctrico y preparó el camino hacia la tecnología moderna.

En 1864 Maxwell reunió todos los resultados conocidos sobre electricidad y magnetismo y los formuló matemáticamente en una teoría basada en cuatro ecuaciones. Las ecuaciones de Maxwell no sólo *sintetizan las propiedades e interrelaciones entre electricidad y magnetismo*, sino que además *predijeron la existencia de las ondas electromagnéticas así como su velocidad* en términos de las propiedades eléctricas y magnéticas del medio (incluido el vacío). Para el vacío la velocidad es independiente de la longitud de onda (la misma para todo el espectro) y perfectamente *coincidente con la velocidad de la luz*, que ya se había medido bastante bien por

entonces. No había duda de que *la luz es una onda electromagnética* en el rango de longitudes de onda que llamamos “visible”.

Un aspecto sorprendente que despertó mucho interés es que las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo transformaciones de Lorentz que, como ya vimos, se propusieron por Lorentz antes de que Einstein las incorporara en su teoría de la relatividad con un significado totalmente distinto. Esta *invariancia Lorentz no se comprendía* y hasta hubo intentos de modificar las ecuaciones para incorporar los movimientos respecto al éter luminífero, del que también hemos hablado.

Aunque Einstein sin duda conocía los intentos fallidos de detectar el éter, parece que lo que más le inspiró fue que las ecuaciones de Maxwell indicaban que había que *aceptar que las leyes de la electricidad y el magnetismo son las mismas para todos los observadores inerciales*. Además Einstein sospechaba que *la electricidad y el magnetismo debían ser manifestaciones de un mismo fenómeno* debido a la simetría entre los siguientes experimentos: si se mueve un imán en el interior de una espira se genera una corriente eléctrica (ley de inducción de Faraday) y si se deja el imán quieto y se mueve la espira ocurre lo mismo (esta vez se interpreta que las cargas en movimiento sufren fuerzas magnéticas perpendiculares a su velocidad lo que origina la corriente en la espira). Para Einstein la física implicada en ambos experimentos debía ser la misma pues estaba convencido de que *lo importante es el movimiento relativo*.

A parte de inspirar el principio de relatividad (primer postulado de Einstein), la invariancia Lorentz de las ecuaciones de Maxwell conduce a la constancia de la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío (segundo postulado).

Queda claro que la electricidad, el magnetismo y la teoría de la relatividad especial están muy relacionados entre sí. No en vano el famoso artículo de Einstein de 1905 en el que proponía la teoría de la relatividad especial se titula “Sobre la electrodinámica de cuerpos móviles”. Nos proponemos ahora clarificar esta relación.

8.2 Las ecuaciones de Maxwell y el concepto de campo

8.2.1 Las ecuaciones

Las ecuaciones de Maxwell para un medio lineal e isótropo¹ son [sistema MKSA]:

$$(\text{divergencia de } \vec{E}) \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (8.1)$$

$$(\text{divergencia de } \vec{B}) \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.2)$$

$$(\text{rotacional de } \vec{E}) \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8.3)$$

¹Las ecuaciones de Maxwell se pueden definir para cualquier medio en términos del desplazamiento eléctrico $\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ y del campo magnético $\vec{H} \equiv \vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$, donde \vec{P} es la polarización del medio, \vec{M} es su magnetización, y ϵ_0 y μ_0 son respectivamente la permitividad y la permeabilidad del vacío. Sólo para un medio lineal e isótropo es posible definir $\vec{D} \equiv \epsilon \vec{E}$ y $\vec{H} \equiv \vec{B}/\mu$. Nos concentraremos en este caso para no complicar la discusión.

$$(\text{rotacional de } \vec{B}) \quad \nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (8.4)$$

donde	ρ	\equiv	densidad de carga	[C m ⁻³]	(1 C \equiv Coulombio = 1 A s)
	\vec{j}	\equiv	densidad de corriente	[A m ⁻²]	
	\vec{E}	\equiv	campo eléctrico	[V m ⁻¹]	
	\vec{B}	\equiv	inducción magnética	[T]	(1 T \equiv Tesla = 1 N A ⁻¹ m ⁻¹)
	ϵ	\equiv	permitividad eléctrica	[F m ⁻¹]	(1 F \equiv Faradio = 1 C V ⁻¹)
	μ	\equiv	permeabilidad magnética	[N A ⁻²]	

$$y \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Estas ecuaciones no expresan directamente la relación entre cargas y fuerzas sino que están escritas en términos de *campos* (\vec{E} y \vec{B}).

La idea de *campo* viene a sustituir el concepto de *acción a distancia*, según el cual una carga ejerce una fuerza sobre otra a través del espacio. En la nueva concepción, la carga modifica las propiedades de la región del espacio que la rodea de modo tal que otra carga experimentará una fuerza mientras esté en esa región del espacio, donde se dice que “hay un campo”. Parece una complicación innecesaria pero gracias al concepto de campo el tratamiento matemático de los fenómenos eléctricos y magnéticos (y también de los gravitacionales y los debidos a todas las demás interacciones) se simplifica enormemente. De hecho, la introducción del concepto de campo fue descrita por el mismo Einstein como “el cambio en la concepción de la realidad más profundo y fructífero que ha acontecido desde los tiempos de Newton”.

Veremos a continuación cómo describen las ecuaciones (de campo) de Maxwell la riqueza de fenómenos electromagnéticos y las consecuencias que llevan aparejadas.

8.2.2 El campo eléctrico y las fuerzas eléctricas

Ecuación (8.1): ley de Gauss

La ecuación (8.1) *expresa la geometría del campo eléctrico*, es decir cómo modifica el campo eléctrico el espacio cuando existe una *densidad carga (fuente del campo eléctrico)*. Supongamos que la carga fuente es una carga puntual Q . Entonces las *líneas de campo*, que señalan en cada punto del espacio la dirección de la fuerza que experimentaría una carga de prueba situada en ese punto son radiales y centradas en la carga fuente (Fig. 8.1). Mayor concentración de líneas de campo en una región del espacio expresa mayor intensidad del campo, la cual es mayor cuanto menor es la distancia a la carga fuente. *Las líneas de campo eléctrico son divergentes.*

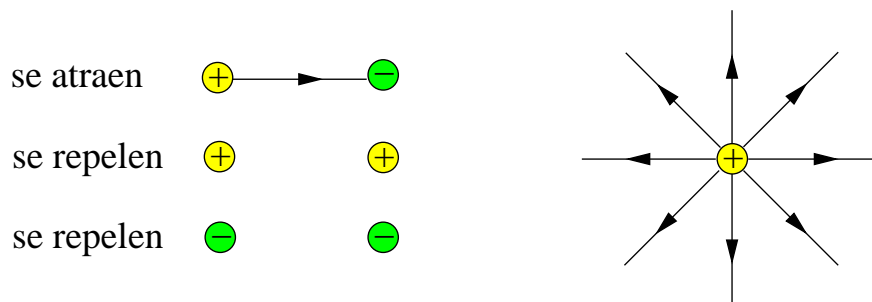


Figura 8.1: Esquema de interacción entre cargas y líneas de campo eléctrico creado por una carga.

En efecto, integrando (8.1) y utilizando el teorema de la divergencia² obtenemos:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon} \int_V \rho dV \quad (\text{ley de Gauss}). \quad (8.5)$$

El flujo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga total encerrada

Ley de Coulomb: fuerza eléctrica

La relación entre la fuerza y el campo eléctrico es sencillamente

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (8.6)$$

lo que conduce correctamente a la conocida ley de Coulomb que describe la fuerza entre dos cargas. En efecto, el campo eléctrico \vec{E} creado por una carga puntual Q estática en el vacío es radial, como anticipábamos, y a una distancia r de la misma vale:

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} Q \quad \Rightarrow \quad F = qE = k_C \frac{Qq}{r^2} \quad (\text{ley de Coulomb}), \quad (8.7)$$

donde $k_C \equiv 1/(4\pi\epsilon_0)$ es la constante y F la fuerza de Coulomb.

8.2.3 El campo magnético y las fuerzas magnéticas

Ecuación (8.2): ley de Gauss para el campo magnético

Integrando (8.2) y utilizando de nuevo el teorema de la divergencia² obtenemos:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (\text{ley de Gauss para el campo magnético}). \quad (8.8)$$

El flujo magnético a través de una superficie cerrada es cero

Es decir, *no existen los monopolos magnéticos* (cargas fuente del campo magnético análogas a las cargas del campo eléctrico). Esta es una diferencia fundamental respecto al campo

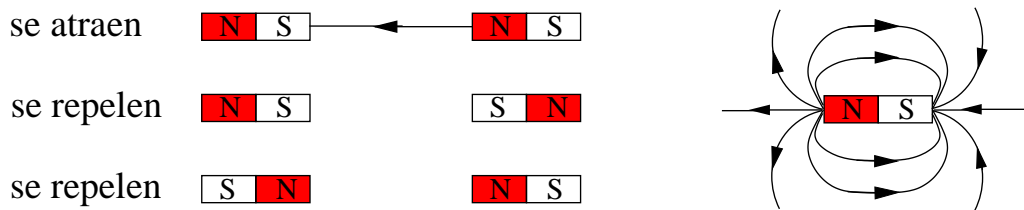


Figura 8.2: Esquema de interacción entre imanes y líneas de campo magnético creado por un imán.

eléctrico que nos indica que *las líneas de campo magnético no son divergentes*, sino que van de un polo al otro del imán que crea el campo (Fig. 8.2).

Ley de Lorentz: fuerzas magnéticas

La relación entre el campo magnético y las fuerzas magnéticas es más complicada. Es un hecho observacional que las fuerzas magnéticas no son experimentadas por cargas estáticas sino por cargas en movimiento respecto al campo magnético (dependiendo de la dirección de las líneas de campo, Fig. 8.3). Este hecho se recoge en la ley de Lorentz:

$$\vec{F} = q\vec{E} + \vec{F}_m, \quad \vec{F}_m = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (\text{ley de Lorentz}) \quad (8.9)$$

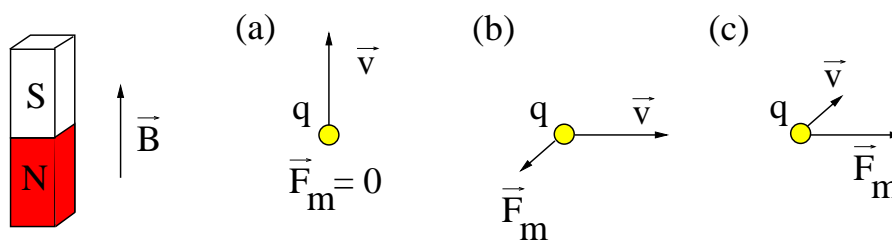


Figura 8.3: Fuerza magnética experimentada por una carga positiva con velocidad \vec{v} respecto a \vec{B} .

8.2.4 La relación entre campos eléctricos y magnéticos

El resto de las ecuaciones expresan que no sólo un objeto cargado es capaz de crear un campo eléctrico y no sólo un imán es capaz de crear un campo magnético: un campo magnético variable produce un campo eléctrico y un campo eléctrico variable produce un campo magnético. Los fenómenos que estas ecuaciones describen serían demasiado complejos de explicar sin la ayuda del concepto de campo.

²El teorema de la divergencia: $\int_V \nabla \cdot \vec{A} \, dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$.

Ecuación (8.3): *ley de inducción de Faraday*

Integrando (8.3) y utilizando el teorema del rotacional³ (teorema de Stokes) obtenemos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (\text{ley de inducción de Faraday}). \quad (8.10)$$

La variación del flujo del campo magnético a través de una espira induce una corriente

El campo eléctrico generado mueve las cargas a lo largo de la espira produciendo una corriente eléctrica. Éste es el principio del *generador eléctrico*.

Ecuación (4): *ley de Ampère*

Integrando (4) y utilizando el teorema del rotacional³ obtenemos:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (\text{ley de Ampère}). \quad (8.11)$$

Las corrientes eléctricas (y las variaciones del flujo del campo eléctrico) generan campos magnéticos

Éste es el principio del *electroimán*.

8.3 Las ondas electromagnéticas

Escribamos ahora las ecuaciones de Maxwell en una región del espacio donde no haya fuentes (*vacío*), $\rho = \vec{j} = 0$:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (8.12)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.13)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (8.14)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (8.15)$$

A partir de estas ecuaciones y usando una conocida propiedad del rotacional⁴ obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) \stackrel{(8.14)}{=} -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{B}) \stackrel{(8.15)}{=} -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} \stackrel{(8.12)}{=} -\nabla^2 \vec{E} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\nabla^2 - \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{E} = 0, \quad (8.16)$$

³El teorema del rotacional: $\int_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$.

⁴Propiedad del rotacional: $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$.

eléctricas de un hilo conductor se muevan muy rápidamente hacia delante y hacia atrás. Esto genera automáticamente un campo magnético variable que inicia la propagación de la onda a través del espacio. Este dispositivo no es ni más ni menos que *una antena*. Los átomos son también capaces de crear ondas electromagnéticas al desexcitarse tras ser sometidos a un calentamiento, por ejemplo.

8.4 La velocidad de la luz y el segundo postulado de Einstein

Las ecuaciones (8.16) y (8.17), que describen las ondas electromagnéticas, son las mismas para cualquier observador inercial. Por tanto su velocidad de propagación c es la misma para todos ellos. Esto es así porque el d'Alembertiano \square^2 es invariante Lorentz:

$$\square^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \nabla'^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t'^2}. \quad (8.20)$$

En efecto: Apliquemos una transformación de Lorentz

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) \quad (8.21)$$

$$x = \gamma (v t' + x') \quad (8.22)$$

$$y = y' \quad (8.23)$$

$$z = z', \quad (8.24)$$

de donde introduciendo $\beta = v/c$ y usando la regla de la cadena,⁵ obtenemos:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} = \gamma \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (8.25)$$

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \gamma \left(\frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right), \quad (8.26)$$

de lo que se deduce inmediatamente (8.20).

Una curiosidad: El producto de las constantes ϵ_0 y μ_0 viene dado por c , pero su valor individual depende del sistema de unidades utilizado. En el sistema MKSA se definen:

$$\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7} = 12.566\ 370\ 614 \dots \times 10^{-7} \text{ N A}^{-2} \quad (8.27)$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2} = \frac{10^7}{4\pi c^2} = 8.854\ 187\ 817 \dots \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1} \quad (8.28)$$

que son valores exactos, pues $c \equiv 299\ 792\ 458 \text{ ms}^{-1}$ es exacto, ya que 1 m se define como la distancia recorrida por la luz en $1/299\ 792\ 458$ segundos.⁶ La constante de Coulomb vale:

$$k_C \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{c^2}{10^7} = 8.987\ 551\ 787 \dots \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}. \quad (8.29)$$

⁵Regla de la cadena: $\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial t}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial t}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial z}$.

⁶Y un segundo se define como $9.192\ 631\ 770 \times 10^9$ ciclos de la radiación producida por la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio ¹³³Cs.

8.5 La unificación de la electricidad y el magnetismo

Ya hemos comentado en la introducción que Einstein estaba intrigado con que fenómenos tales como el movimiento de una espira respecto a un imán fijo y el movimiento de un imán dejando la espira fija fueran tratados como debidos a fuerzas diferentes: en el primer caso se utilizaba la ley de Lorentz (8.9) para hallar la fuerza *magnética* que experimentan las cargas en movimiento respecto al imán; y en el segundo caso se utilizaba la ecuación (8.3) de Maxwell (ley de inducción de Faraday) que supone la creación de una corriente *eléctrica* en la espira. Él pensaba que sólo la velocidad relativa entre imán y espira debía ser importante y ésta es la misma en ambos casos, de modo que la *apariencia magnética o eléctrica* debían ser dos aspectos de una misma fuerza, dependientes del observador.

En su trabajo de 1905 Einstein no sólo pone las bases de la relatividad especial sino que también unifica electricidad y magnetismo, mostrando que la invariancia Lorentz de las ecuaciones de Maxwell permite relacionar cómo miden dos observadores inerciales distintos una *misma* fuerza. Un observador montado en una carga eléctrica en reposo con respecto a un campo eléctrico experimenta sólo una fuerza eléctrica en la dirección del campo. Pero un segundo observador montado en una carga en movimiento con respecto al mismo campo eléctrico experimenta dos fuerzas: una similar a la fuerza eléctrica que experimentaba el primero y otra adicional que es idéntica a lo que se denominaba fuerza “magnética”. Puede demostrarse que si para el primero

$$\vec{E}' \neq 0, \quad \vec{B}' = 0, \quad (8.30)$$

para el segundo

$$\vec{E} = \gamma \vec{E}' - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \vec{\beta} \cdot \vec{E}' \vec{\beta}, \quad \vec{B} = \gamma (\vec{\beta} \times \vec{E}'). \quad (8.31)$$

Einstein probó de este modo que las ecuaciones de Maxwell eran consistentes con el principio de relatividad y con la constancia de la velocidad de la luz para todos los observadores inerciales. Nótese que las ecuaciones de Maxwell no prueban el segundo postulado sino que el segundo postulado implica la forma de las transformaciones de Lorentz que permite entender que la velocidad de la luz en el vacío sea la misma para todos los observadores inerciales sin necesidad de introducir el misterioso éter.

8.5.1 Una paradoja del electromagnetismo resuelta por la relatividad

Para finalizar este tema, ilustraremos la potencia del principio de relatividad y la sutileza de sus implicaciones en el contexto del electromagnetismo.⁷ Consideremos un electrón que circula paralelo a un conductor por el que pasa una corriente eléctrica. Supongamos que este electrón va a la misma velocidad y sentido que los electrones de conducción de la corriente.

⁷Agradezco al Profesor Juan de Dios Jiménez Valladares que me haya hecho notar este bonito ejemplo. Véase *The Feynman Lectures on Physics*, vol II, cap. 13-6.

Para un observador situado en el cable, el electrón se mueve y por tanto éste experimenta una fuerza magnética creada por la corriente en el cable que lo atrae hacia él. La paradoja aparece cuando intentamos explicar esa atracción desde el punto de vista de un observador situado sobre el electrón: éste estará sometido al campo magnético creado por las cargas positivas del cable, que para él están en movimiento, pero no debería notar ninguna fuerza magnética puesto que se encuentra en reposo respecto al cable. Tampoco debería notar ninguna fuerza eléctrica porque el cable es neutro (tantas cargas positivas como negativas). ¿Cómo entonces puede explicar el observador en el electrón la atracción hacia el cable que ineludiblemente experimenta?

Lo que ocurre es que el volumen ocupado por las cargas positivas del cable se contrae (debido a la contracción de Lorentz en la dirección del movimiento) mientras que el de los electrones de conducción no cambia. Es decir, la densidad de carga positiva es mayor que la negativa para el observador en el electrón. Esto hace que el electrón sufra una fuerza eléctrica que explica la atracción. De nuevo vemos que una misma fuerza (el electromagnetismo) puede ser interpretada por un observador (en este caso, el del electrón) como una fuerza eléctrica y por otro (en este caso, el del cable) como una fuerza magnética.