# Tema 7

# MOVIMIENTOS ACELERADOS MEDIDOS POR OBSERVADORES INERCIALES

## 7.1 Introducción

Existe el prejuicio de que los movimientos acelerados sólo pueden estudiarse en el marco de la Relatividad General. Sin embargo esto es un error de concepto. Cualquier observador inercial puede medir un movimiento acelerado y relacionar sus observaciones con las de otro observador inercial haciendo uso de las transformaciones de Lorentz.

## 7.2 Transformaciones de Lorentz para velocidades y aceleraciones

Ya conocemos las transformaciones de Lorentz que relacionan las coordenadas espaciotemporales de cualquier suceso para dos observadores inerciales cualesquiera. Supongamos que $\mathcal{O}'$ se desplaza a *velocidad constante* $v$ respecto a $\mathcal{O}$ en la dirección del eje $x$. Entonces:

$$t = \gamma(t' + vx'/c^2) \tag{7.1}$$
$$x = \gamma(vt' + x') \tag{7.2}$$
$$y = y' \tag{7.3}$$
$$z = z' \,. \tag{7.4}$$

Si las coordenadas del suceso anterior corresponden a la posición en la que se encuentra un móvil en un instante de tiempo dado, podemos deducir la relación entre las variaciones de la posición con el tiempo (velocidad) y las variaciones de la velocidad con el tiempo (aceleración) según las mide el observador inercial $\mathcal{O}$ o el $\mathcal{O}'$. En efecto:

Sean $\vec{u} = d\vec{r}/dt$ y $\vec{u}' = d\vec{r}'/dt'$ las velocidades medidas por $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ respectivamente, donde $(\vec{r}, t)$ y $(\vec{r}', t')$ son las respectivas coordenadas espaciotemporales en un instante dado.

Entonces las ecuaciones anteriores conducen a:

$$u_x = \frac{v + u'_x}{1 + vu'_x/c^2} \tag{7.5}$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)} \tag{7.6}$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)} \; . \tag{7.7}$$

Del mismo modo, si $\vec{a} = d\vec{u}/dt$ y $\vec{a}' = d\vec{u}'/dt'$ son las aceleraciones medidas por cada observador, de la ecuaciones anteriores se deduce que:

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3(1 + vu'_x/c^2)^3} \tag{7.8}$$

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2(1 + vu'_x/c^2)^2} - \frac{vu'_y a'_x/c^2}{\gamma^2(1 + vu'_x/c^2)^3} \tag{7.9}$$

$$a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2(1 + vu'_x/c^2)^2} - \frac{vu'_z a'_x/c^2}{\gamma^2(1 + vu'_x/c^2)^3} \; . \tag{7.10}$$

## 7.3 El sistema de referencia de reposo instantáneo

En particular, si el observador $\mathcal{O}'$ se encuentra *instantáneamente en reposo* respecto al móvil, la velocidad de éste será $\vec{u}' = (u'_x = 0, u'_y = 0, u'_z = 0)$, se tiene que

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3} \tag{7.11}$$

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2} \tag{7.12}$$

$$a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2} \; . \tag{7.13}$$

Nótese que un observador en reposo instantáneo *no es* el que va montado en el móvil.

## 7.4 Ejemplo práctico

Un astronauta experimenta una aceleración continua $g = 9.8$ m/s$^2$ en su sistema de reposo instantáneo. Si parte del reposo desde la Tierra,

(a) ¿Cuánto tiempo terrestre tarda en alcanzar una velocidad $v = \beta c$, siendo $\beta = 0.5$? ¿Y para $\beta = 0.9$? ¿Y en alcanzar la velocidad de la luz? Comparar con el resultado de las ecuaciones no relativistas.

(b) ¿Qué distancia habrá recorrido al cabo de un tiempo terrestre $t$? Comparar con el resultado de las ecuaciones no relativistas.

*Solución*:

El astronauta no es un observador inercial, pero en el sistema de referencia inercial que se mueve a la misma velocidad que él en un instante dado ($u'_x = 0, u'_y = 0, u'_z = 0$), su *sistema de reposo instantáneo*, sabemos que $\vec{a}' = (a'_x = g, a'_y = 0, a'_z = 0)$ donde el eje $x$ es perpendicular a la superficie terrestre, dirección de aceleración de la nave espacial.

(a) Podemos aplicar entonces las ecuaciones (7.11-7.13) que nos dicen que $a_y = a_z = 0$ y

$$a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{g}{\gamma^3(v)} \quad \Rightarrow \quad \int_0^v \gamma^3(v)dv = \int_0^t g dt, \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \; ; \tag{7.14}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = gt \; ; \tag{7.15}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{gct}{\sqrt{c^2+g^2t^2}} \; . \tag{7.16}$$

Por tanto, en alcanzar la velocidad $v = \beta c$ tarda

$$t = \frac{\beta c}{g\sqrt{1-\beta^2}} \; . \tag{7.17}$$

Así que en alcanzar $\beta = 0.5$ tarda $t = c/(g\sqrt{3}) \approx 1.8 \times 10^7$ s $\approx 208$ días $\approx$ 7 meses. Y en alcanzar $\beta = 0.9$ tarda $t \approx 2.06c/g \approx 6.3 \times 10^7$ s $\approx 730$ días $\approx$ 2 años.

Vemos que cuando $t \to \infty$ se tiene que $\beta \to 1$, es decir, se va aproximando a la velocidad de la luz pero no la alcanza nunca.

Nótese que para velocidades no relativistas ($\beta \ll 1$) se recupera el resultado $v = gt$. Si utilizáramos esta ecuación no relativista para calcular $t = v/g$ obtendríamos resultados tanto más erróneos cuanto mayor es $v$. Así, $t \approx 180$ días para $v = c/2$ y $t \approx 318$ días para $v = 0.9c$. Véase Fig. 7.1a.

(b) Para hallar la distancia recorrida, utilizamos la ecuación (7.17)

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{gct}{\sqrt{c^2+g^2t^2}} \quad \Rightarrow \quad \int_0^x dx = \int_0^t \frac{gct}{\sqrt{c^2+g^2t^2}} dt \; ; \tag{7.18}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}} - 1\right) \; . \tag{7.19}$$

Vemos que cuando $t \to \infty$ se tiene que $x \sim ct$.

Nótese que para velocidades no relativistas ($\beta \ll 1$) se recupera el resultado $x = \frac{1}{2}gt^2$. Véase Fig. 7.1b.

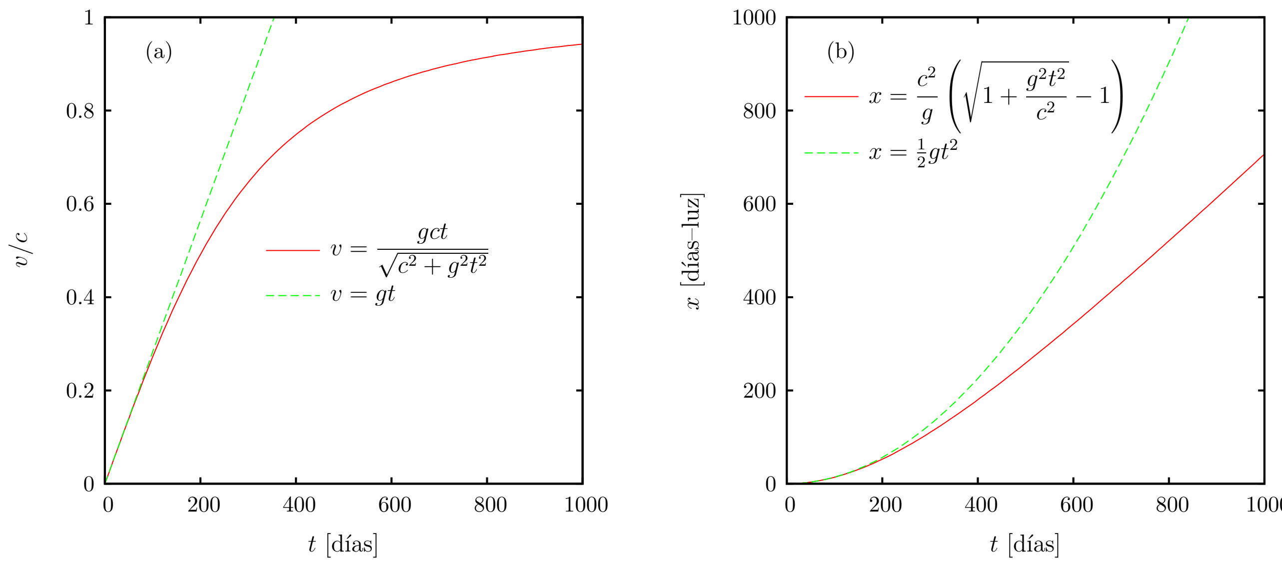


Figura 7.1: Velocidad y distancia recorridas en función del tiempo terrestre.

# Ejercicio

**7.1** Deduce las expresiones que relacionan las velocidades y las aceleraciones que miden dos observadores inerciales cualesquiera (7.5) – (7.10).