Tema 7

Dinámica relativista: E = mc^2 y movimiento acelerado

7.1 Introducción

Hemos visto que conviene considerar el espaciotiempo como un espacio cuadridimensional en el que podemos localizar sucesos (dónde y cuándo ocurre algo) y líneas de universo (trayectorias en el espaciotiempo). Las coordenadas de un suceso se representan mediante un vector de cuatro componentes (*cuadrivector espacio-tiempo*),

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} . \tag{7.1}$$

Como ya hemos visto, si $\mathcal{O}'$ es un observador que se desplaza a velocidad v respecto a $\mathcal{O}$, las coordenadas espaciotemporales de un mismo suceso medidas por ambos observadores están relacionadas mediante la transformación de Lorentz pura (*boost*):

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} , \quad \beta = \frac{v}{c} , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} , \tag{7.2}$$

donde hemos orientado los ejes y y z de ambos observadores perpendicularmente a la dirección del *boost*, por conveniencia. Un *boost* en una dirección arbitraria tiene la forma:

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta_1 \quad \gamma\beta_2 \quad \gamma\beta_3 \\ \gamma\beta_1 & \\ \gamma\beta_2 & \delta_{ij} + (\gamma-1)\dfrac{\beta_i\beta_j}{\beta^2} \\ \gamma\beta_3 & \end{pmatrix} , \quad \beta^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 . \tag{7.3}$$

7.2 La equivalencia entre masa y energía

Existen otros cuadrivectores, cuyas componentes se transforman por definición de la misma manera que las coordenadas espaciotemporales bajo transformaciones de Lorentz. En particular, el *cuadrivector energía-momento*:

$$\begin{pmatrix} p^0 \\ p^1 \\ p^2 \\ p^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E \\ p_x c \\ p_y c \\ p_z c \end{pmatrix} . \tag{7.4}$$

Del mismo modo que el módulo de un (tri)vector $a \doteq (a_x, a_y, a_z)$ en el espacio euclídeo tridimensional, definido por

$$(a_x)^2 + (a_y)^2 + (a_z)^2 , \tag{7.5}$$

permanence invariante bajo una rotación arbitraria R, el módulo de un cuadrivector $a \doteq (a^0, a^1, a^2, a^3)$ en el espacio cuadridimensional de Minkowski, definido por

$$(a^0)^2 - (a^1)^2 - (a^2)^2 - (a^3)^2 , \tag{7.6}$$

permanece invariante bajo una transformación de Lorentz arbitraria Λ. Las rotaciones espaciales $\mathcal{R}$ son un caso particular de transformación de Lorentz, que deja invariante el módulo de los cuadrivectores sin afectar a la componente temporal,

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & R_{ij} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} . \tag{7.7}$$

En general, toda transformación de Lorentz Λ puede escribirse como el producto de una rotación espacial $\mathcal{R}$ por una transformación de Lorentz pura L,

$$\Lambda = \mathcal{R} L . \tag{7.8}$$

El módulo del cuadrivector espacio-tiempo es una cantidad invariante llamada *intervalo*, que hemos introducido en (2.4),

$$\Delta s^2 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 . \tag{7.9}$$

Del mismo modo, el módulo del cuadrivector energía-momento es una cantidad invariante, también lo es la *masa*, definida como

$$(m_0 c^2)^2 = E^2 - (pc)^2 , \quad p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 . \tag{7.10}$$

Podemos distinguir dos casos:

- *Un cuerpo de masa* $m_0 \neq 0$ tiene (tri)momento $p' = 0$ y energía:

$$E' = m_0 c^2 , \quad p' = 0 \quad \text{en reposo,} \tag{7.11}$$

pero en un sistema de referencia en el que se mueva con velocidad v,

$$\begin{pmatrix} E \\ pc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 c^2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E = \gamma m_0 c^2 , \quad p = \gamma\beta m_0 c . \tag{7.12}$$

Nótese que (7.10) implica

$$E = \sqrt{(m_0c^2)^2 + (pc)^2} \tag{7.13}$$

y aplicando la definición de velocidad a esta expresión,

$$v = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{pc^2}{E} = \beta c\ , \tag{7.14}$$

obtenemos un resultado consistente con (7.12),

$$\beta = \frac{pc}{E}\ , \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E}{m_0c^2}\ . \tag{7.15}$$

La energía mínima de un cuerpo de masa m_0 es su energía en reposo, $E_0 = m_0c^2$. Si lo observamos en movimiento, su energía cinética y su momento son:

$$K = E - E_0 = m_0c^2(\gamma - 1) \underset{v\ll c}{\longrightarrow} m_0c^2\left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \cdots - 1\right) \approx \frac{1}{2}m_0v^2\ , \tag{7.16}$$

$$p = \gamma\beta m_0 c \underset{v\ll c}{\longrightarrow} m_0 v\ , \tag{7.17}$$

que coinciden con las expresiones newtonianas para velocidades mucho menores que la de luz (*límite no relativista*).

Sin embargo, si incrementamos progresivamente la energía (en un acelerador de partículas, por ejemplo) la velocidad no aumentará indefinidamente, pues la expresión relativista nos dice que cuando $v \to c$ el factor de Lorentz $\gamma \to \infty$. Es decir, haría falta una energía infinita para que un objeto de masa m_0 alcance $v = c$. Por tanto, *c es una velocidad límite, que no puede rebasarse*.

- En cambio, para *una partícula de masa $m_0 = 0$* (por ejemplo un fotón, un cuanto de luz) no existe el sistema de referencia en reposo, pues a partir de (7.10),

$$m_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad E = pc \quad \Rightarrow \quad v = c\ , \tag{7.18}$$

es decir, *su velocidad es siempre c*.

Nota: Con (demasiada) frecuencia se llama "masa en reposo" m_0 a la masa que hemos usado en las expresiones anteriores y se usa el término "masa relativista" m para referirse a la energía de un cuerpo de masa m_0 cuando está en movimiento,

$$E = mc^2\ , \quad m = \gamma m_0 \tag{7.19}$$

que conduce al mismo resultado para la energía que (7.12). Ésta es de hecho la forma habitual de la archifamosa ecuación de Einstein. Aquí se ha preferido usar la terminología más actual, en la que nos referimos a la "masa" como un invariante relativista m_0 y a la energía como la componente temporal del cuadrivector energía-momento. Como componentes que son de un cuadrivector, la energía y el momento dependen del observador y pueden determinarse a partir de sus valores para un observador dado mediante una transformación de Lorentz. Además la expresión (7.19), a diferencia de (7.10) o (7.13), no es útil en el caso de una partícula como el fotón, que tiene energía y momento pero masa $m_0 = 0$ y $\beta = 1$, es decir $\gamma = \infty$. En adelante, llamaremos *masa* a la masa invariante m_0 y la denotaremos m, sin subíndice, pues no habrá confusión con la masa relativista de (7.19), que nunca usaremos.

7.3 Transformaciones de Lorentz de velocidades y aceleraciones

Existe el prejuicio de que los movimientos acelerados sólo pueden estudiarse en el marco de la Relatividad General. Sin embargo esto es un error de concepto. Cualquier observador inercial puede medir un movimiento acelerado y relacionar sus observaciones con las de otro observador inercial haciendo uso de las transformaciones de Lorentz.

Ya conocemos las transformaciones de Lorentz que relacionan las coordenadas espaciotemporales de cualquier suceso para dos observadores inerciales cualesquiera. Supongamos que $\mathcal{O}'$ se desplaza a *velocidad constante* $v = \beta c$ respecto a $\mathcal{O}$ en la dirección del eje x. Entonces están relacionadas por (7.2).

Si las coordenadas del suceso anterior corresponden a la posición en la que se encuentra un móvil en un instante de tiempo dado, podemos deducir la relación entre las variaciones de la posición con el tiempo (velocidad) y las variaciones de la velocidad con el tiempo (aceleración) según las mide el observador inercial $\mathcal{O}$ o el $\mathcal{O}'$. En efecto:

Sean $\boldsymbol{u} = d\boldsymbol{r}/dt$ y $\boldsymbol{u}' = d\boldsymbol{r}'/dt'$ las velocidades medidas por $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ respectivamente, donde $(\boldsymbol{r}, t)$ y $(\boldsymbol{r}', t')$ son las respectivas coordenadas espaciotemporales en un instante dado. Entonces las ecuaciones anteriores conducen a:

$$u_x = \frac{v + u'_x}{1 + vu'_x/c^2} \tag{7.20}$$

$$u_y = \frac{u'_y}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)} \tag{7.21}$$

$$u_z = \frac{u'_z}{\gamma(1 + vu'_x/c^2)} \,. \tag{7.22}$$

Del mismo modo, si $\boldsymbol{a} = d\boldsymbol{u}/dt$ y $\boldsymbol{a}' = d\boldsymbol{u}'/dt'$ son las aceleraciones medidas por cada observador, de la ecuaciones anteriores se deduce que:

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3(1 + vu'_x/c^2)^3} \tag{7.23}$$

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2(1 + vu'_x/c^2)^2} - \frac{vu'_y a'_x/c^2}{\gamma^2(1 + vu'_x/c^2)^3} \tag{7.24}$$

$$a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2(1 + vu'_x/c^2)^2} - \frac{vu'_z a'_x/c^2}{\gamma^2(1 + vu'_x/c^2)^3} \,. \tag{7.25}$$

7.4 El sistema de referencia de reposo instantáneo

En particular, si el observador $\mathcal{O}'$ se encuentra *instantáneamente en reposo* respecto al móvil, la velocidad de éste será $\boldsymbol{u}' = (u'_x = 0, u'_y = 0, u'_z = 0)$, se tiene que

$$a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3} \tag{7.26}$$

$$a_y = \frac{a'_y}{\gamma^2} \tag{7.27}$$

$$a_z = \frac{a'_z}{\gamma^2} \,. \tag{7.28}$$

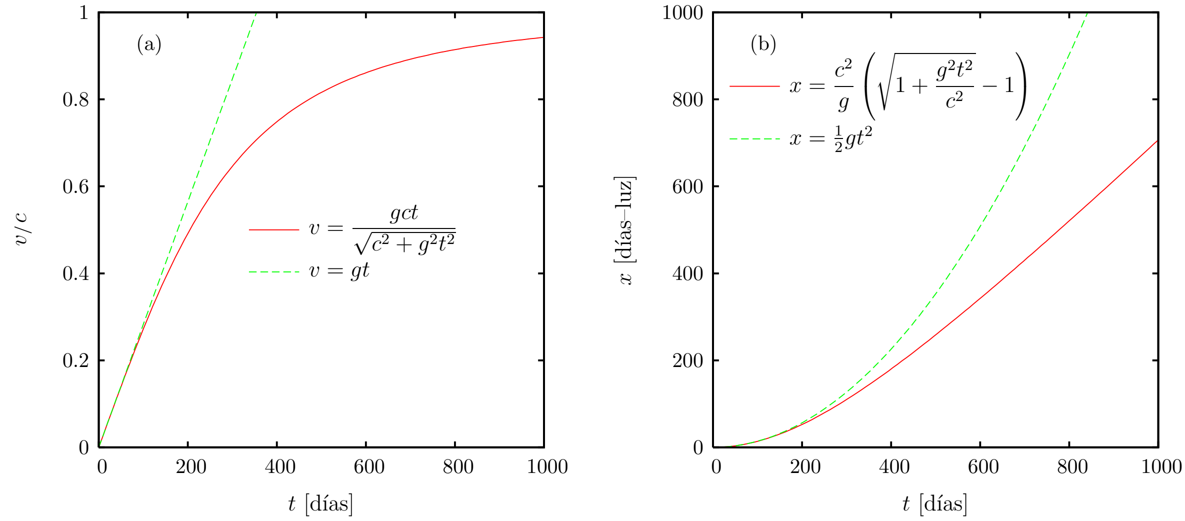

Figura 7.1: Velocidad y distancia recorridas en función del tiempo terrestre.

Nótese que un observador en reposo instantáneo *no es* el que va montado en el móvil.

7.5 Ejemplo práctico

Supongamos que un astronauta experimenta una aceleración continua $g = 9.8$ m/s^2 en su sistema de reposo instantáneo. Si parte del reposo desde la Tierra,

(a) ¿Cuánto tiempo terrestre tarda en alcanzar una velocidad $v = \beta c$, siendo $\beta = 0.5$? ¿Y en alcanzar $\beta = 0.9$? ¿Y en alcanzar la velocidad de la luz? Comparar con el resultado de las ecuaciones no relativistas.

(b) ¿Qué distancia habrá recorrido al cabo de un tiempo terrestre t? Comparar con el resultado de las ecuaciones no relativistas.

Solución:

El astronauta no es un observador inercial, pero en el sistema de referencia inercial que se mueve a la misma velocidad que él en un instante dado $(u'_x = 0, u'_y = 0, u'_z = 0)$, su *sistema de reposo instantáneo*, sabemos que $\boldsymbol{a}' = (a'_x = g, a'_y = 0, a'_z = 0)$ donde el eje x es perpendicular a la superficie terrestre, dirección de aceleración de la nave espacial.

(a) Podemos aplicar entonces las ecuaciones (7.26-7.28) que nos dicen que $a_y = a_z = 0$,

$$a_x = \frac{dv}{dt} = \frac{g}{\gamma^3(v)} \quad \Rightarrow \quad \int_0^v \gamma^3(v)dv = \int_0^t g dt, \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ ; \tag{7.29}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = gt\ ; \tag{7.30}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{gct}{\sqrt{c^2+g^2t^2}}\ . \tag{7.31}$$

Por tanto, en alcanzar la velocidad $v = \beta c$ tarda

$$t = \frac{\beta c}{g\sqrt{1-\beta^2}} . \qquad (7.32)$$

Así que en alcanzar $\beta = 0.5$ tarda $t = c/(g\sqrt{3}) \approx 1.8 \times 10^7$ s ≈ 208 días ≈ 7 meses. Y en alcanzar $\beta = 0.9$ tarda $t \approx 2.06c/g \approx 6.3 \times 10^7$ s ≈ 730 días ≈ 2 años.

Vemos que cuando $t \to \infty$ se tiene que $\beta \to 1$, es decir, se va aproximando a la velocidad de la luz pero no la alcanza nunca.

Nótese que para velocidades no relativistas $(\beta \ll 1)$ se recupera el resultado $v = gt$. Si utilizáramos esta ecuación no relativista para calcular $t = v/g$ obtendríamos resultados tanto más erróneos cuanto mayor es v. Así, $t \approx 180$ días para $v = c/2$ y $t \approx 318$ días para $v = 0.9c$. Véase Fig. 7.1a.

(b) Para hallar la distancia recorrida, utilizamos la ecuación (7.32)

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{gct}{\sqrt{c^2+g^2t^2}} \quad \Rightarrow \quad \int_0^x dx = \int_0^t \frac{gct}{\sqrt{c^2+g^2t^2}} dt ; \qquad (7.33)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}} - 1\right) . \qquad (7.34)$$

Vemos que cuando $t \to \infty$ se tiene que $x \sim ct$.

Nótese que para velocidades no relativistas $(\beta \ll 1)$ se recupera el resultado $x = \frac{1}{2}gt^2$. Véase Fig. 7.1b.

Ejercicios

7.1 Deduce las expresiones que relacionan las velocidades y las aceleraciones que miden dos observadores inerciales cualesquiera (7.20) – (7.25).