Tema 6

El efecto Doppler y el desplazamiento cosmológico al rojo

6.1 Introducción

El término *efecto Doppler* se refiere a todos los fenómenos relacionados con el cambio de frecuencia observada para una perturbación periódica dada. Se denomina así en honor al físico austriaco C. Doppler quien enunció los principios esenciales del mismo en 1842, en conexión con la espectroscopía atómica.

Para comprender mejor las diferencias con el caso de la luz, que es el que nos interesa en Relatividad, discutiremos primero el efecto Doppler acústico. Veremos que en el caso del sonido, o cualquier vibración que se propague por un medio, lo importante es la velocidad de fuente y receptor respecto al medio de propagación. En cambio, para la luz en el vacío lo importante es la velocidad relativa entre la fuente y el receptor. El efecto Doppler relativista, que aplica a la luz, tiene en cuenta además que el ritmo del tiempo para emisor y fuente en movimiento relativo son diferentes.

Al final del tema interpretaremos el desplamiento al rojo del espectro de las galaxias y otros objetos lejanos en términos del efecto Doppler debido a su alejamiento a gran velocidad, si bien hoy día lo consideramos una manifestación de la expansión del universo, que produce efectos parecidos (véase Tema 12).

6.2 Efecto Doppler acústico

Todos estamos familiarizados con el efecto Doppler acústico: cambio de tono que experimenta un sonido cuando el observador (receptor), la fuente del sonido o ambos se mueven respecto al medio de propagación del mismo (habitualmente el aire). Consideraremos, por simplicidad, que emisor y receptor se mueven a lo largo de la misma línea recta.

Figura 6.1: Fuente (F) y receptor (R) de un sonido en movimiento respecto al aire.

6.2.1 Fuente y receptor en movimiento respecto al aire

Pensaremos en la señal acústica como una sucesión de pulsos separados por un intervalo de tiempo constante τ (el periodo de la fuente). [a] Sea w la velocidad del sonido respecto al aire y sean u_1 y u_2 respectivamente las velocidades de la fuente (F) y del receptor (R) respecto al aire (Fig. 6.1). Supondremos que ni F ni R superan la barrera del sonido ($|u_1| < w$, $|u_2| < w$).

Nótese que el sonido no viaja a distinta velocidad respecto al medio de propagación aunque la fuente de emisión se mueva a través del mismo. Entonces, $v' = w - u_2$ es la velocidad del sonido según R y $\lambda' = (w - u_1)\tau$ es la longitud de onda de la señal respecto al aire, de modo que la separación temporal entre dos pulsos según R (el periodo τ' que mide el receptor) será

$$\tau' = \frac{w - u_1}{w - u_2}\tau \qquad \Rightarrow \qquad \nu' = \frac{w - u_2}{w - u_1}\nu \,, \tag{6.1}$$

donde ν' es, por tanto, la frecuencia recibida por R, siendo ν la frecuencia emitida por F.

Veamos ahora unos cuantos casos particulares de interés. Especificamos entre paréntesis el cambio de tono que sufre el sonido: se hace más grave (menor frecuencia) o más agudo (mayor frecuencia). Introducimos el cociente $\beta = v/w$ donde v es la velocidad relativa entre receptor y fuente.

6.2.2 Fuente en reposo

Receptor se aleja

$(u_1 = 0,\ u_2 = v)$

$$\nu' = \nu(1 - \beta) \quad \text{(más grave)} \tag{6.2}$$

Receptor se acerca

$(u_1 = 0,\ u_2 = -v)$

$$\nu' = \nu(1 + \beta) \quad \text{(más agudo)} \tag{6.3}$$

[a] Se trata entonces de un sonido puro. En general en una onda sonora se superponen diferentes frecuencias. Siempre podemos tratar cada una de ellas por separado.

6.2.3 Receptor en reposo

Fuente se aleja

$(u_1 = -v,\ u_2 = 0)$

$$\nu' = \frac{\nu}{1+\beta} \quad \text{(más grave)} \tag{6.4}$$

Fuente se acerca

$(u_1 = v,\ u_2 = 0)$

$$\nu' = \frac{\nu}{1-\beta} \quad \text{(más agudo)} \tag{6.5}$$

Nótese que para $\beta \ll 1$ (velocidades pequeñas comparadas con las del sonido) da igual que la fuente se acerque (o aleje) al receptor o que el receptor se acerque (o aleje) a la fuente, pues en este caso $1/(1 \pm \beta) \approx (1 \mp \beta)$.

6.3 Efecto Doppler para la luz

En el caso de la luz en el vacío sólo importa la velocidad relativa entre la fuente y el observador. Consideraremos en primer lugar los casos en los que fuente y observador se mueven sobre la línea recta que los separa, alejándose o acercándose. Después trataremos el caso general, que incluye a estos dos como casos particulares así como el denominado efecto Doppler transverso.

6.3.1 Fuente y observador se alejan

De nuevo podemos imaginarnos la señal como una sucesión de pulsos separados por un intervalo de tiempo constante τ, según la fuente.[b] Supongamos que el observador (receptor) se aleja con velocidad v respecto a la fuente. En la Fig. 6.2 hemos dibujado el diagrama espacio-tiempo correspondiente.

Es entonces directo deducir a partir de las líneas de universo de dos pulsos consecutivos que

$$t_1 = \frac{1}{c}x_1\ , \quad t_2 = \frac{1}{c}x_2 + \tau \tag{6.6}$$

y a partir de la línea de universo del receptor que

$$t_1 = \frac{1}{v}(x_1 - x_0)\ , \quad t_2 = \frac{1}{v}(x_2 - x_0)\ . \tag{6.7}$$

[b]Se trata entonces de una luz monocromática. En general una onda electromagnética es superposción de ondas monocromáticas que podemos tratar por separado. Serán ondas *luminosas* si su espectro corresponde al de la luz visible.

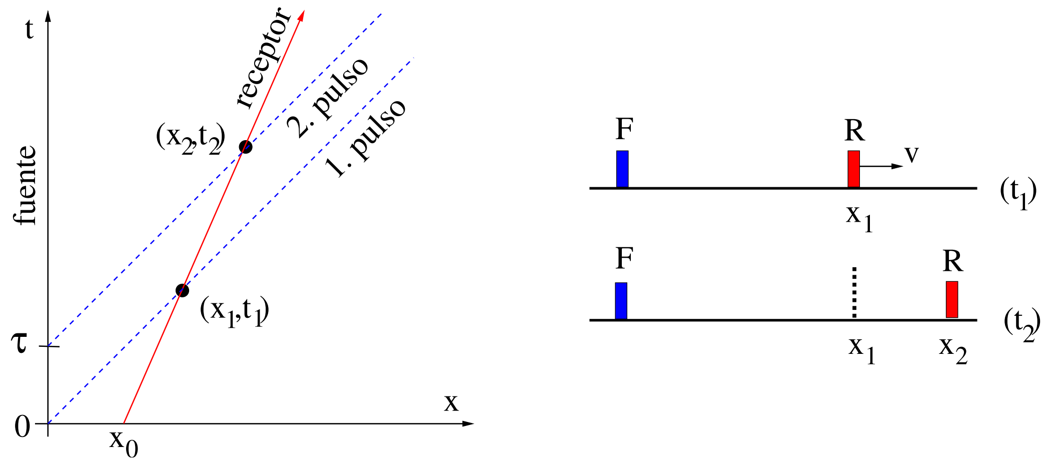

Figura 6.2: Diagrama espacio-tiempo y esquema para el alejamiento del receptor de la fuente.

Por tanto, podemos despejar $\Delta t = t_2 - t_1$ y $\Delta x = x_2 - x_1$,

$$\Delta t = \frac{c\tau}{c-v} , \quad \Delta x = \frac{cv\tau}{c-v} . \tag{6.8}$$

Finalmente, aplicando las transformaciones de Lorentz obtenemos ($\beta = v/c$):

$$\tau' = \Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v}{c^2} \Delta x \right) = \frac{\tau}{\gamma(1-\beta)} = \gamma(1+\beta)\tau , \tag{6.9}$$

y por tanto,

$$\nu' = \gamma(1-\beta)\nu \quad \text{es decir} \quad \nu' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\nu \quad \text{(desplazamiento al rojo)} \tag{6.10}$$

6.3.2 Fuente y observador se acercan

Cambiando el signo de β se obtiene:

$$\nu' = \gamma(1+\beta)\nu \quad \text{es decir} \quad \nu' = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\nu \quad \text{(desplazamiento al azul)} \tag{6.11}$$

Nótese que para $\beta \ll 1$ ($v \ll c$) obtenemos expresiones idénticas a las del efecto Doppler acústico cuando $v \ll w$.

6.3.3 Caso general y efecto Doppler transverso

Supongamos ahora que la fuente y el receptor no se mueven en la dirección de la línea que los separa sino según indica la Fig. 6.3. Dos pulsos consecutivos emitidos por F tardan respectivamente r_1'/c y r_2'/c en llegar a R. Si la fuente está suficientemente lejos o los pulsos son suficientemente cortos entonces es una buena aproximación escribir

$$\Delta r' = r_1' - r_2' = \Delta x' \cos\theta . \tag{6.12}$$

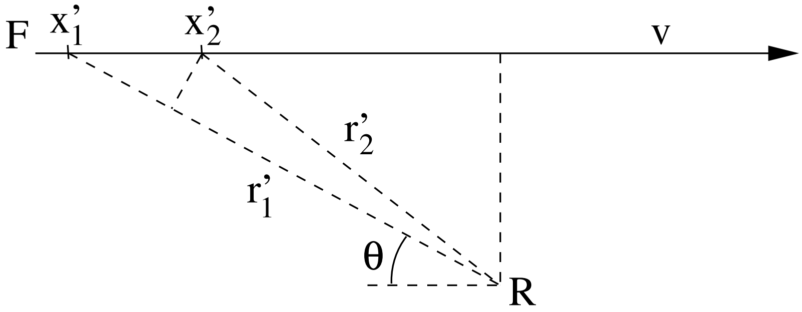

Figura 6.3: Fuente y receptor no se mueven colinealmente.

Estos dos pulsos fueron emitidos en dos instantes de tiempo t'_1 y t'_2. Todo ello según las coordenadas del receptor R. El tiempo entre los dos pulsos que mide R es τ',

$$\tau' = (t'_2 + r'_2/c) - (t'_1 + r'_1/c) = \Delta t' - \frac{\Delta r'}{c} = \Delta t' - \frac{\Delta x'}{c}\cos\theta \ . \tag{6.13}$$

Para la fuente, ambos pulsos fueron emitidos en instantes t_1 y t_2, separados entre sí por el periodo $\tau = t_2 - t_1$. Por otro lado, sabemos que $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma\tau$ (dilatación temporal) y que $\Delta x' = v\Delta t' = v\gamma\tau$. Por tanto,

$$\tau' = \gamma(1 - \beta\cos\theta)\tau \quad \text{es decir} \quad \nu' = \frac{\nu}{\gamma(1-\beta\cos\theta)} \ . \tag{6.14}$$

Para $\cos\theta = \mp 1$ (fuente y receptor colineales) recuperamos los resultados (6.10) y (6.11). Nótese que cuando no son colineales puede haber desplazamientos al rojo aunque fuente y receptor se acerquen, o al azul aunque se alejen (véase la Fig. 6.4). Para $\cos\theta = 0$ obtenemos el *efecto Doppler transverso*, debido exclusivamente al factor de Lorentz.

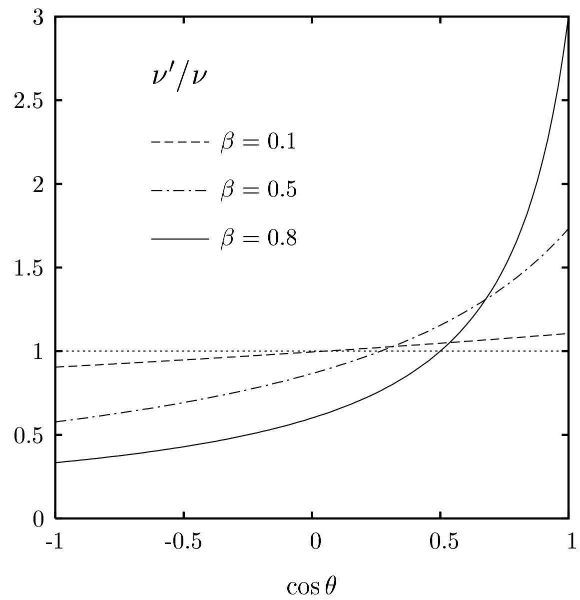

Figura 6.4: Efecto Doppler para la luz en función del ángulo para diferentes velocidades relativas entre fuente y observador $\beta = v/c$.

6.4 Desplazamiento cosmológico al rojo como efecto Doppler

6.4.1 El parámetro de desplazamiento al rojo

Es un hecho observacional que los espectros de la luz procedente de galaxias y otros objetos lejanos se encuentran desplazados al rojo. Se suele definir el *parámetro de desplazamiento al rojo*

$$z = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} > 0 \tag{6.15}$$

donde ν_0 es la frecuencia de la línea espectral emitida por la fuente y ν la medida en la Tierra. Análogamente para las longitudes de onda λ_0 y λ.

La interpretación más obvia de este hecho es que todas las estrellas y galaxias lejanas se alejan de la Tierra y por tanto sus espectros de desplazan por efecto Doppler.[c] Sustituyendo

$$\nu = \frac{\nu_0}{\gamma(1+\beta)} \tag{6.16}$$

se obtiene

$$z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1 \quad \Leftrightarrow \quad \beta = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} \tag{6.17}$$

donde $v = \beta c$ es la velocidad de alejamiento. Nótese que para $v \ll c$, es decir $\beta \ll 1$, tenemos que $z \approx \beta$.

6.4.2 La ley de Hubble-Humanson

Fue el norteamericano E. Hubble quien en 1919, tras establecer la existencia de galaxias exteriores a nuestra Vía Láctea, descubrió que los espectros de tales galaxias se encontraban desplazados al rojo. En años posteriores Humanson realizó muchas más observaciones que no sólo constataban este hecho sino que además mostraban un patrón bien definido, que en 1929 fue formulado como la ley de Hubble-Humanson: el desplazamiento al rojo es proporcional a la distancia,

$$cz = H_0 d \ , \tag{6.18}$$

lo cual se interpretó como el efecto Doppler debido al alejamiento de las galaxias a una velocidad proporcional a la distancia

$$v = H_0 d \ . \tag{6.19}$$

Por tanto, el parámetro de desplazamiento al rojo es una medida de la distancia a la que se encuentra la galaxia. La medida de la constante de Hubble H_0, que interviene en varias magnitudes cosmológicas, se conoce cada vez con mayor precisión:

$$H_0 \equiv 100\ h \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1}, \quad h = 0.7 \pm 0.1 \ . \tag{6.20}$$

[c] ¿Significa esto que la Tierra es el centro del Universo? Responderemos a esta pregunta en el Tema 12.

Así por ejemplo $z = 0.1$ corresponde a una distancia de unos 40 Mpc, donde 1 pc (parsec) equivale a 3.26 años luz.[d]

Obtener espectros de galaxias u objetos muy lejansos y además averiguar su distancia por otro método para comprobar si se verifica la ley de Hubble conlleva una gran dificultad. Hoy día se sabe que la ley de Hubble (6.18) se cumple muy bien hasta distancias de $z \approx 0.1$. Esto no nos extrañará cuando conozcamos los modelos de universo en Relatividad General. Entonces veremos que este alejamiento se interpreta en términos de una expansión regulada por la gravedad cósmica y cuya fórmula es en realidad

$$H_0 d_L = c\left[z + \frac{1}{2}(1-q_0)z^2 + \dots\right] \tag{6.21}$$

donde q_0 es el llamado parámetro de deceleración y d_L la distancia de luminosidad. Por tanto la ley de Hubble lineal (6.18) es válida sólo para $z \ll 1$. También veremos que la observación de cierto tipo de supernovas lejanas (que se consideran candelas estándar) ha permitido medir el parámetro de deceleración y desvelado que $q_0 < 0$, es decir, el universo está en expansión acelerada! (Fig. 12.2) Esto parece indicar que existe una componente, llamada energía oscura, que produce un efecto contrario al que produce la materia, ya sea la ordinaria o la materia oscura.

Ejercicios

6.1 ¿A qué velocidad hay que conducir hacia un semáforo para que la luz roja ($\lambda = 650$ nm) se vea verde ($\lambda = 525$ nm)?

6.2 Utilizando el efecto Doppler, encuentra la frecuencia con que llegan a los gemelos Apolo y Diana las felicitaciones de Navidad (número de felicitaciones al año) y comprueba que coincide con el resultado que encontramos en el Tema 6.

[d]Para hacerse una idea, nuestra galaxia tiene un diámetro de unos 100.000 años luz y la galaxia más cercana, Andrómeda, se encuentra aproximadamente a 1 Mpc, es decir $z \approx 0.0025$.