

Tema 4

LA PARADOJA DE LOS GEMELOS

4.1 La aventura de los gemelos

En el día de Año Nuevo de 2050, Diana parte de la Tierra en dirección a α Centauro, a una distancia de 4 años-luz, viajando a una velocidad de $0.8c$. Inmediatamente después de llegar a su destino, Diana regresa a la Tierra a la misma velocidad, aterrizando en el punto de partida el día de Año Nuevo de 2060.

Diana tiene un hermano gemelo, Apolo, que permanece en la Tierra. Ambos habían acordado felicitarse mutuamente por teléfono-radar cada día de Año Nuevo, hasta que se volvieran a ver en casa.

Veamos lo que ocurre en todo este tiempo según cada uno de los gemelos. El intercambio de felicitaciones a principios de cada año nos ayudará a entender mejor la solución de la *aparente* paradoja que se plantea.

4.2 La paradoja

Apolo aguarda a su hermana durante $t = 10$ años, pues se tarda 5 años en llegar a α Centauro viajando a $0.8c$. Él observa que su hermana se aleja a una enorme velocidad durante 5 años y luego se acerca a la misma velocidad otros 5 años. Apolo conoce la teoría de la relatividad, así que espera que el tiempo para Diana haya transcurrido más lentamente, $t' = t/\gamma = 6$ años, pues el factor de Lorentz es $\gamma = 5/3$ en ambos recorridos. Por tanto, Apolo espera encontrarse a su hermana gemela *Diana 4 años más joven*.

Por otro lado, podríamos intentar resolver el problema desde el punto de vista de Diana. Para ella, es Apolo el que se aleja a velocidad $0.8c$. Cuando para ella transcurren $t' = 6$ años para Apolo pasan $t = t'/\gamma = 3.6$ años. Por tanto, Diana espera encontrarse a su hermano gemelo *Apolo 2.4 años más joven*.

Llegamos pues a una contradicción: parece que *ambos* deberían ser más jóvenes que su hermano gemelo. ¡Ésta es la paradoja!

Algunos detractores de la teoría de Einstein utilizaron esta inconsistencia para argumentar que era por consiguiente absurdo que uno de los gemelos fuera más joven que el otro tras el viaje. La cuestión en realidad es *¿qué está mal en el razonamiento anterior?*

4.3 Solución

Veremos que el cálculo que hace Apolo es el correcto pues la simetría aparente del problema no es tal: no es lo mismo que Apolo vea alejarse y luego acercarse a su hermana que Diana vea alejarse y luego acercarse a Apolo. La *asimetría* entre ambas situaciones se manifiesta en que mientras Apolo envía 10 felicitaciones a Diana por Año Nuevo, Diana envía sólo 6, incluyendo las que se envían en el último día de viaje.

Concluimos que es cierto que uno de los gemelos es más joven que el otro tras el viaje: Diana será 4 años más joven.

4.3.1 Diagrama espacio-tiempo

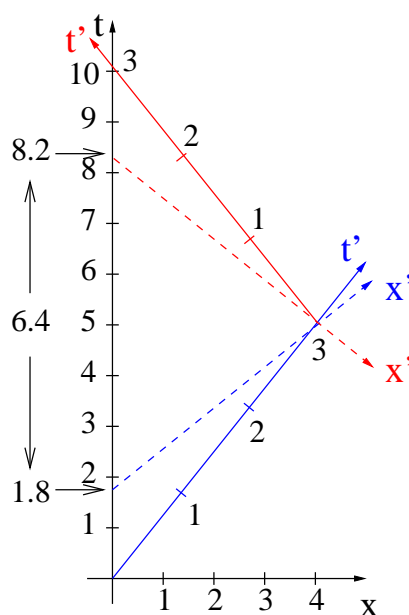


Figura 4.1: Diagrama espacio-tiempo realizado por Apolo.

En la Fig. 4.1 se muestra el diagrama espacio-tiempo del viaje de Diana trazado por Apolo, en el sistema de referencia de la Tierra. Hemos dibujado también los *ejes espaciotemporales del sistema de referencia de Diana* notando que *son diferentes para el viaje de ida y el de vuelta*. Expresamos las escalas de todos los ejes en años-luz.

Es fácil leer en el diagrama que el tiempo total transcurrido para Apolo es de 10 años mientras que para Diana transcurren $3+3=6$ años. El tiempo de Diana parece correr más

espacio que el de Apolo. *Diana es 4 años más joven que Apolo.*

Sobre el diagrama se han trazado también las líneas de simultaneidad de Diana justo antes y justo después de llegar a α Centauro (sus ejes espaciales). Es muy llamativo lo que el diagrama espacio-tiempo nos muestra:

- Un instante antes de que Diana dé la vuelta, para ella han transcurrido 3 años mientras que para Apolo sólo han pasado 1.8 años: el tiempo de Apolo parece correr más despacio que el de Diana (para ella, y hasta ese momento, Apolo le parece más joven). Hasta aquí la situación es simétrica.
- Un instante después, Diana da la vuelta y entonces su línea de simultaneidad cambia drásticamente: de repente observa que su hermano (que hace un momento le parecía más joven que ella) *envejece 6.4 años repentinamente*. A partir de ese momento para ella transcurren otros 3 años, en los que Apolo parece envejecer sólo 1.8 años. Sin embargo, el salto brusco de edad que experimentó Apolo mientras ella daba la vuelta determina que en el momento del reencuentro *Diana es efectivamente 4 años más joven que Apolo*.

4.3.2 El número de felicitaciones por Año Nuevo

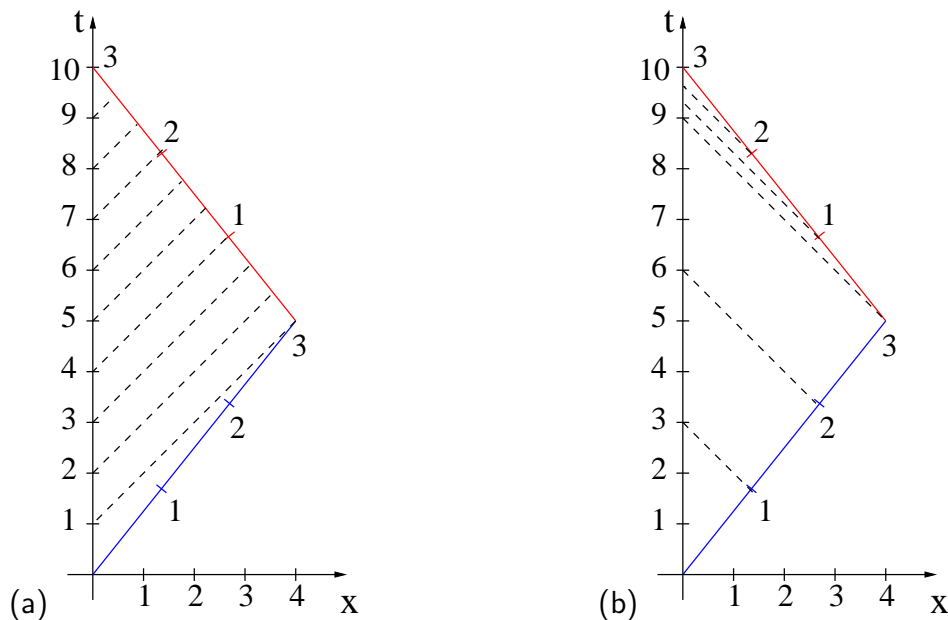


Figura 4.2: Líneas de universo de las felicitaciones de Apolo a Diana (a) y de Diana a Apolo (b).

Veamos que en efecto hay una asimetría en el movimiento relativo entre Apolo y Diana que determina que sólo uno de los dos sea más joven que el otro, de modo que no hay paradoja.

En la Fig. 4.2a se muestran las líneas de universo de todas las señales de radar que Apolo envía a Diana cada Año Nuevo. Vemos que *Diana recibe 10 felicitaciones*. Diana recibe sólo

una antes de llegar a α Centauro, cuando habían pasado 3 años, justo antes de dar la vuelta. Las 9 restantes le llegan durante su viaje de vuelta a razón de una cada 1/3 año (4 meses).

En la Fig. 4.2b se muestran las líneas de universo de todas las señales de radar que Diana envía a Apolo cada Año Nuevo. Vemos que *Apolo recibe 6 felicitaciones*. Las 3 primeras a razón de una cada 3 años y las otras 3 en el último año.

Este resultado está relacionado con el efecto Doppler, que estudiaremos en el Tema 6.

4.3.3 Interpretación de lo sucedido

En el momento de dar la vuelta, Diana pasa de un sistema de referencia inercial a otro distinto, mientras que Apolo está todo el tiempo en un mismo sistema inercial. Éste es el origen de la asimetría y la razón por la que sólo el cálculo de Apolo es correcto.

El argumento del párrafo anterior es suficiente para entender lo sucedido, pero podemos ir más lejos. Mientras maniobra para dar la vuelta (deceleración y aceleración posterior en sentido contrario) *Diana siente fuerzas de inercia que no siente Apolo*.¹ Durante esos instantes (tal vez días), *Diana deja de ser un observador inercial y, por tanto, la Relatividad Especial no nos dice cómo cambian sus coordenadas espaciotemporales*, es decir no nos permite averiguar qué es lo que ella observaría.² Lo que sí sabemos es que *mientras dura la maniobra su reloj parece ir muy despacio*, pues desde su punto de vista cuando la maniobra acaba Apolo ha envejecido 6.4 años muy rápidamente: *cuando Diana deja de acercarse uniformemente a α Centauro Apolo es 1.2 años más joven que ella y cuando empieza a abandonar uniformemente la estrella Apolo es 5.2 años mayor que ella*. Mientras mantenga rumbo uniforme hacia la Tierra Diana vuelve a ser un observador inercial y los cálculos de dilatación vuelven a ser correctos: Apolo envejece más lentamente que ella, de modo que en los siguientes 3 años Apolo envejece sólo 1.8 años. Así, cuando se encuentran Apolo es 6.4 años mayor que ella.

Podríamos argumentar que, en su partida y a su regreso a la Tierra, Diana experimenta fuerzas de inercia que no hemos tenido en cuenta y que la harían parecer aún más joven de lo que hemos calculado, pues, según hemos visto, el efecto de la aceleración parece ser el retraso de los relojes. Sin embargo, tal efecto es despreciable ya que suponemos que las aceleraciones tienen lugar relativamente cerca de su hermano (en poco tiempo) y por tanto el giro de sus líneas de simultaneidad se traduce en un pequeño desplazamiento sobre el eje temporal de Apolo.

¹De hecho deber ser una dura experiencia para Diana. La deceleración y la posterior aceleración debe hacerlas gradualmente o de lo contrario quedará aplastada por fuerzas de muchísimos *gs*.

²Podemos imaginar lo que ocurriría si Diana pudiera ver a su hermano a través de un monitor en su nave (con el lógico retraso): Apolo envejecería 6.4 años en un instante, mientras dure la maniobra de frenada y reacceleración rumbo a la Tierra. En cambio para Apolo los relojes de la nave de Diana siguen marchando de forma constante y siempre más lentamente que los suyos en Tierra.

4.3.4 Algunos comentarios

En el razonamiento anterior hemos supuesto explícitamente que el reloj (biológico) de Diana medido por Apolo (observador inercial) corre al mismo ritmo antes y después de sufrir las aceleraciones cuando las velocidades relativas son las mismas. Ésta es la *hipótesis del reloj* que establece que el ritmo de un reloj medido por un observador inercial depende sólo de su velocidad relativa a ese observador y es independiente de su aceleración (o derivadas más altas). Los experimentos de Bailey y colaboradores³ en los años 70 han comprobado esta hipótesis para aceleraciones de hasta $10^{18}g$.

Cuando estudiemos la Relatividad General (RG) veremos que se establece una equivalencia entre observadores acelerados y observadores sometidos a un campo gravitatorio. En RG no hay observadores privilegiados, el movimiento es relativo incluso para observadores acelerados, de modo que Diana puede interpretar que el universo entero frena y da la vuelta respecto a su nave y Apolo puede interpretar que la nave de Diana frena y da la vuelta respecto a la Tierra y el resto del universo. Parece que la situación vuelve a ser simétrica pero no es así: en el primer caso Diana sufre el retraso de su reloj (biológico o cualquier otro) pues se ve sometida a un intenso campo gravitatorio originado por todo el Cosmos, cuya inercia es enorme, mientras que en el segundo caso el reloj de Apolo no se ve afectado por la pequeña perturbación que supone el minúsculo campo gravitatorio equivalente al cambio de dirección de la nave de Diana, cuya inercia es comparativamente despreciable. Por tanto, a diferencia de Diana, decir que *Apolo es un observador inercial es una muy buena aproximación*.

Una pregunta interesante que se plantea entonces es ¿ocurriría lo mismo que antes cuando Diana enciende los motores de su nave si en el universo no hubiera más que dos naves espaciales, la de Diana y la de Apolo? La respuesta no se conoce. Depende de que se adopte la concepción de inercia de Eddington o la concepción machiana de Sciama.⁴ Para Eddington la respuesta es afirmativa, la situación sigue siendo asimétrica. Para Sciama la respuesta es negativa, la situación es simétrica y además no sería posible que Diana y por consiguiente Apolo aceleraran pues su inercia sería despreciable. Este último punto de vista lleva a la relatividad hasta sus últimas consecuencias, de lo contrario el “tejido” espaciotemporal se convierte en un referente absoluto, similar al desterrado éter. La cuestión se reduce a ¿existe el espaciotiempo independientemente de la materia o por el contrario está creado por la materia?

¿Y si Diana regresa al punto de partida tras viajar en línea recta, sin tener que dar la vuelta, moviéndose en un universo cerrado? En ese caso ambos viven en un universo curvado por la gravedad y ambos son observadores no inerciales en todo momento. No podemos razonar lo que ocurre usando la Relatividad Especial. La situación sería equiva-

³Se compararon las vidas medias de muones de gran energía moviéndose en línea recta con las de muones de la misma energía dando vueltas en un anillo de almacenamiento.

⁴Mientras que para Eddington y otros, los efectos inerciales debidos a la rotación y a la aceleración tienen lugar en relación al espaciotiempo (algo parecido al espacio absoluto de Newton), para Sciama, éstos son el resultado del movimiento relativo con respecto a la totalidad del universo. El principio de Mach establece que la inercia de un cuerpo viene determinada por la de todas las masas del universo. Veremos en el Tema 9 que la propuesta de Einstein es intermedia.

lente a que Diana y Apolo se encontraran recorriendo en sentidos contrarios la misma órbita alrededor del Sol. La simetría del problema y el sentido común nos llevan necesariamente a la conclusión de que el tiempo corre al mismo ritmo para ambos en tales circunstancias.

4.4 Comprobación experimental: relojes voladores

Todavía no es factible que alguien haga un viaje de ida y vuelta a enormes velocidades por el espacio para comprobar que realmente para él el tiempo ha pasado más despacio. Sin embargo, en octubre de 1971 Hafele y Keating realizaron un conclusivo experimento que proporciona sin ninguna ambigüedad la solución empírica a la paradoja de los gemelos.⁵

Cuatro relojes atómicos de cesio viajaron en línea aérea regular a bordo de varios aviones alrededor del mundo, primero en dirección este y luego en dirección oeste.⁶ Otro reloj de cesio se dejó como referencia en Washington. Respecto a un hipotético reloj situado en el centro de la Tierra (sistema de referencia que se puede considerar localmente inercial, como ya veremos) todos los relojes se dilatan en un factor de Lorentz que viene dado por la velocidad lineal de rotación de la Tierra v_T (reloj de Washington), la suma de v_T y la velocidad de los aviones v_A (relojes que vuelan en dirección este) y la diferencia entre v_T y v_A (relojes que vuelan en dirección oeste). El efecto final es que, respecto al reloj que se queda en Washington, cabe esperar que los relojes que viajan hacia el este se retrasen y los que viajen hacia el oeste se adelanten. Se observó que efectivamente así fue. Las predicciones deben tener en cuenta, además del efecto de dilatación cinemática que hemos mencionado (véase Ejercicio 4.1), el efecto de dilatación gravitatoria del que hablaremos más adelante (Tema 10). Allí compararemos la predicción total con el efecto observado (Ejercicio 10.1).

Ejercicio

4.1 Suponiendo que los vuelos del experimento de Hafele y Keating fueron ecuatoriales, a unas velocidades medias respecto al suelo de 713 km/h hacia el este y 440 km/h hacia el oeste, y durante un tiempo de 41.2 y 48.6 horas respectivamente, comprueba que la relatividad especial predice que:

- (a) Los relojes que viajan hacia el este se retrasan 184 ns.
- (b) Los relojes que viajan hacia el oeste se adelantan 96 ns.

Ayuda: Es conveniente usar la aproximación $\sqrt{1-x} \simeq 1 - \frac{1}{2}x$ si $x \ll 1$. $1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$.

⁵J. C. Hafele y R. E. Keating, Science **177** (1972) 166.

⁶El experimento costó 8000 dólares de los cuales 7600 se invirtieron en billetes de avión.